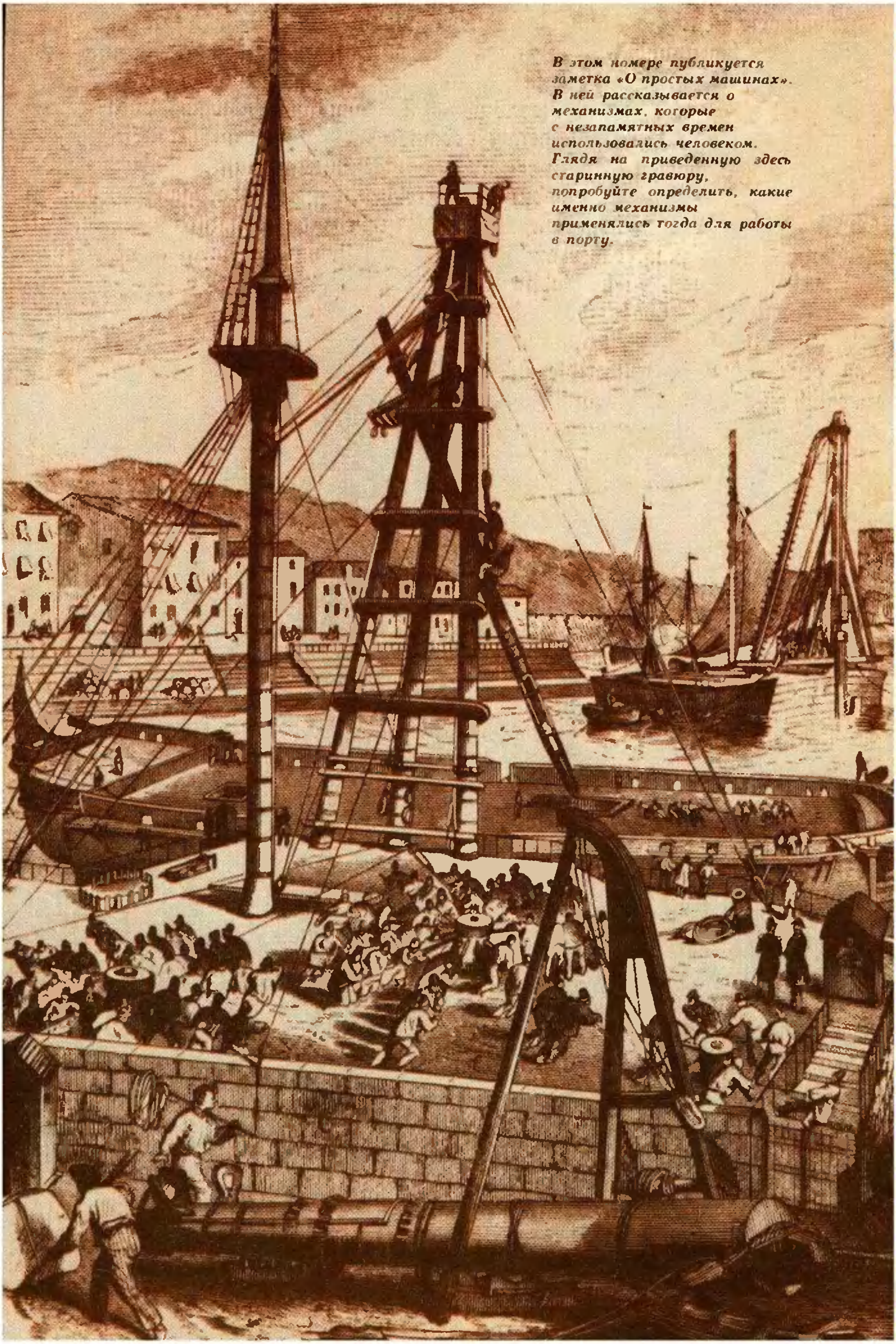
ISSN 0130-2221

Квант

4
1985

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР



В этом номере публикуется заметка «О простых машинах». В ней рассказывается о механизмах, которые с незапамятных времен использовались человеком. Глядя на приведенную здесь старинную гравюру, попробуйте определить, какие именно механизмы применялись тогда для работы в порту.

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Квант

4 1985

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ: / **IN THIS ISSUE:**

Только социализм даст возможность широко распространить и настоящим образом подчинить общественное производство и распределение продуктов по научным соображениям...

В. И. Ленин

День советской науки

Советская наука за несколько десятилетий прошла впечатляющий путь, увенчанный многими, известными всему миру, достижениями. Путь этот можно проиллюстрировать высказываниями наших выдающихся творцов науки. Речь в них идет не только об особенностях науки социализма, но и важнейших чертах советского ученого.

Технический и социальный прогресс теснейшим образом связаны друг с другом. Октябрь послужил основой грандиозных социальных преобразований, в свою очередь, оказавших глубокое влияние на научно-техническую революцию.

Академик М. В. КЕЛДЫШ

Советская наука, далекая от крайностей, сочетает в себе здоровый, сильный практицизм, определяемый задачами социалистического строительства, с той внутренней логикой научного мышления, которая требуется для правильной постановки и решения научных проблем.

Академик С. И. ВАВИЛОВ

Именно прогресс фундаментальных знаний изменяет, казалось бы, установившиеся и незыблемые в науке точки зрения, открывает новые области в науке и технике, коренным образом меняет технологию, приводит к появлению новых материалов и открывает возможности использования совершенно новых, часто неожиданных явлений в областях, совершенно не имевших никакого отношения к первоначальной области исследования.

Академик А. П. АЛЕКСАНДРОВ

... развитие науки — это не столько результат гениального прозрения одиночек, сколько плод организованного и целенаправленного труда многих простых, но очень настойчивых, добросовестных и трудолюбивых людей.

Академик А. И. БЕРГ

В органическом слиянии чистой и прикладной математики, в диалектическом единстве абстрактного и конкретного я вижу наиболее яркую и философски значительную, наиболее принципиальную особенность советской математики.

Академик П. С. АЛЕКСАНДРОВ

... современная физика — это своего рода двуликий Янус. С одной стороны, — это наука с горящим взором, которая стремится проникнуть в глубь великих законов материального мира. С другой стороны, — это фундамент новой техники, мастерская смелых технических идей, опора обороны и движущая сила непрерывного индустриального прогресса.

Академик Л. А. АРЦИМОВИЧ

... исследователь, способный к глубокому философскому анализу, обогащенный пониманием того, что происходит на всем огромном фронте науки, пониманием сущности общественных процессов, знаток и ценитель общечеловеческих культурных ценностей, такой исследователь, кроме всего прочего, шире смотрит на проблемы своей научной области, видит то, что ускользает от взгляда какого-нибудь профессионального аскета.

Академик Р. В. ХОХЛОВ

Наука — общее достояние человечества, и задача подлинного ученого — обогащать этот запас знаний, доступных всем.

Академик А. Н. КОЛМОГОРОВ

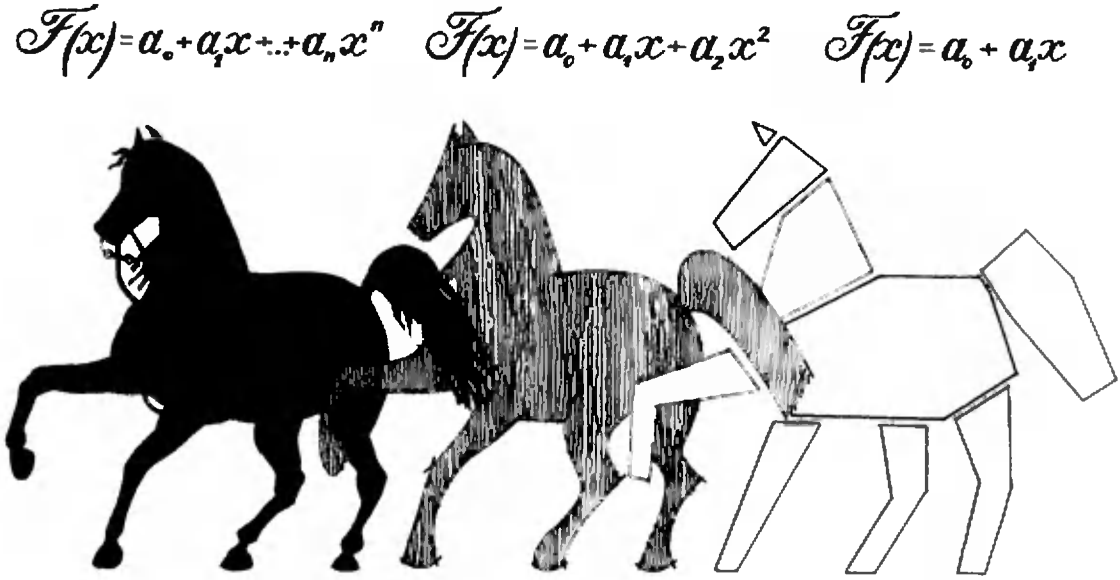
Советский ученый является прежде всего гражданином своей страны, поэтому идеалы его жизни и деятельности совпадают с идеалами, которыми живут все граждане его страны. Его научная работа движется той же целеустремленностью, которой живет вся страна.

Академик П. Л. КАПИЦА

Я верю, что человеческий разум восторжествует и люди не допустят использования достижений науки в целях, не совместимых с гуманизмом и человеческой моралью.

Задача ученых заключается не только в развитии научных исследований, но и в борьбе за их использование на благо общества, на благо всех людей мира.

Академик И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ



Приближенные вычисления и формула Тейлора

В. Р. ПОЧУЕВ

Эта статья начинается с простых замечаний о приближенных арифметических вычислениях, которые естественно приводят к замечательной формуле Тейлора. В частных случаях эта формула устанавливается школьными методами, а затем используется для приближенного вычисления значений функций.

Два примера для разминки

Предположим, что нужно вычислить произведение

$$p=1{,}03\times 2{,}01$$

с точностью до 0,001. Это вычисление естественно проделать так

$$p=(1+0{,}03)\cdot(2+0{,}01)\approx$$
$$\approx 2+0{,}06+0{,}01=2{,}07.$$

Здесь мы пренебрегли четвертым слагаемым $0{,}01\times 0{,}03=0{,}0003$, так как оно меньше предписанной точности.

Использованный прием станет более наглядным, если обозначить число 0,01 через x. Тогда наше вычисление — это просто вычисление функции (многочлена)

$$f(x)=(1+3x)(2+x)=2+7x+3x^2$$

при значении $x=0{,}01$, ибо $p=f(0{,}01)$. При написании приближенного равенства $f(x)\approx 2+7x$, мы пренебрегаем членом $3x^2$ более высокой (второй) степени.

Рассмотрим чуть более сложный пример: вычислим с точностью до 0,01 произведение

$$q=2{,}12\times 1{,}97.$$

Обозначая теперь число 0,1 через x, мы видим, что вычислить q — это значит найти значение функции

$$g(x)=(2+x+2x^2)(2-3x^2)$$

при $x=0{,}1$. Раскрывая скобки, получим

$$g(x)=4+2x-2x^2-3x^3-6x^4.$$

Членами с x^3 и x^4 можно пренебречь, так как при $x=0{,}1$, $x^3=0{,}001$ и $x^4=0{,}0001$ находятся за пределами требуемой точности 0,01. Итак,

$$q=g(0{,}1)\approx 4+2(0{,}1)-2(0{,}1)^2=4{,}18.$$

Проанализируем наши действия

Успех вычислений основывался на том факте, что искомое произведение p (или q) было близко к точно известному числу A, а затем представлялось как значение некоторой функции $f(x)$ при малом x, причем $f(0)$ равнялось A.

Так, в первом примере грубая прикидка дает $p\approx 1\cdot 2=2=A_1$, а отклонения сомножителей от единицы и двойки малы. Аналогично, во втором примере грубая прикидка дает $q\approx 2\cdot 2=4=A_2$, и вновь отклонения сомножителей от двоек малы. В первом случае это отклонение сомножителей мерилось в «x-единицах», где x было 0,01, а во втором случае — в других «x'-единицах», где x' было 0,1.

Далее, подбираемая функция $f(x)$ (или $g(x)$) разбивалась на две части — существенную и второстепенную:

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),\ f_1(x)=2+7x,$$
$$f_2(x)=3x^2,\ g(x)=g_1(x)+g_2(x),$$
$$g_1(x)=4+2x-2x^2,\ g_2(x)=-3x^3-6x^4,$$

где существенные части $f_1(x)$ (и $g_1(x)$) были многочленами первой и второй степени, представляющими результат с требуемой точностью, а f_2 и g_2 были пренебрежимо малы.

Введем символ «о малое»

В рассмотренных случаях в математическом анализе часто используется следующая более короткая и более выразительная форма записи:

$$f(x)=2+7x+o(x),$$
$$g(x)=4+2x-2x^2+o(x^2).$$

Здесь символ $o(x)$ (читается «о малое от x») обозначает некоторую функцию от x (точный вид ее нас не интересует), которая стремится к нулю быстрее чем x, то есть такая, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}=0.$$

Аналогично, $o(x^2)$ — некоторая функция от x, стремящаяся к нулю быстрее, чем x^2, то есть

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^2}=0.$$

Вообще $o(x^n)$, при $n\geqslant 1$,— это обозначение для функции от x, обладающей таким свойством:

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}=0.$$

Используя арифметические свойства пределов (см. Алгебра и начало анализа 9—10, п.), легко установить следующие правила, позволяющие преобразовать сложные выражения, содержащие о малое, в более простые:

(а) $o(x^n)+o(x^n)=o(x^n)$,

(б) $C\cdot o(x)=o(x)$ (если C — константа),

(в) $x\cdot o(x^n)=o(x^{n+1})$,

(г) $x^{n+1}=o(x^n)$, и т. п.

(Например, чтобы установить (а), нужно показать, что сумма двух функций, каждая из которых стремится к нулю, сама стремится к нулю; а это сразу следует из правила о сумме пределов.)

Выведем несколько приближенных формул

Воспользуемся символами $o(x)$, $o(x^2)$, ... и их свойствами для вывода некоторых формул, полезных при приближенных вычислениях.

Пример 1. *Докажем формулу:*

$$\boxed{(1+x)^3=1+3x+o(x).}\qquad(1)$$

(Член $o(x)$ подсказывает нам, что этой формулой можно пользоваться, если квадратом x можно пренебречь в наших вычислениях.)

Доказательство. По формуле куба суммы

$$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3,$$

но $x^2=o(x)$ (правило (г)); $3x^2=o(x)$ (правило (б)); $x^3=o(x)$ (правила (г), (в)). Поэтому

$$(1+x)^3=1+3x+o(x)+o(x)=$$
$$=1+3x+o(x).$$

Таким образом, мы можем написать с точностью до 0,01:

$$(1{,}012)^3\approx 1+3\cdot 0{,}012=1{,}036.$$

Пример 2. *Докажем формулу:*

$$\boxed{\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+\ldots+q^n+o(q^n).}\qquad(2)$$

Доказательство немедленно следует из легко проверяемого тождества

$$\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+\ldots+q^n+\frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Воспользуемся формулой (2) для приближенного вычисления дроби $r=201/203$. Представляя эту дробь в виде

$$r=\frac{1+\frac{1}{200}}{1+\frac{3}{200}},$$

рассмотрим функцию

$$h(x)=\frac{1+x}{1+3x};\quad h\left(\frac{1}{200}\right)=h(0{,}005)=r.$$

Возьмем в (2) $n=2$, $q=-3x$; тогда

$$\frac{1}{1+3x}=1-3x+9x^2+o(x^2),$$

$$h(x)=(1+x)\frac{1}{1+3x}=$$
$$=1-2x+6x^2+o(x^2).$$

Таким образом, $r=h(0{,}005)\approx 1-$ $-0{,}01+0{,}000150=0{,}990150$.

Упражнения

1. Написать и установить формулу для $(1+x)^7$ с точностью $o(x^2)$.

2. Написать и установить формулу для $1/(1+q)$ с точностью $o(q^n)$.

Приближенное вычисление радикалов

При приближенном вычислении радикалов мы будем различать «хороший» случай и «плохой». В «хорошем» случае под знаком квадратного корня стоит число, мало отличающееся от полного квадрата,— вычисляемое число λ имеет вид $\sqrt{a^2+\alpha}$, где α мало по сравнению с a^2. Для иллюстрации этого случая рассмотрим следующий пример.

Пример 3. *Найдем приближенное значение корня* $\lambda=\sqrt{99}$.

Представим λ в виде
$$\lambda=\sqrt{100-1}=10\sqrt{1-0{,}01}$$
и рассмотрим функцию $r(x)=\sqrt{1+x}$, так что $\lambda=10r(-0{,}01)$. Допустим, что при малых x существует приближенная формула
$$r(x)=a+bx+cx^2+o(x^2). \qquad (3)$$
Найдем a, b и c. Прежде всего, устремляя x к нулю, получаем: $a=1$. Теперь возведем обе части равенства (3) в квадрат:
$$1+x=a^2+2abx+(b^2+2ac)x^2+o(x^2).$$
Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях последнего равенства, получим $a^2=1$; $2ab=1$; $b^2+2ac=0$. Учитывая, что $a=1$, находим: $b=1/2$; $c=-1/8$. Итак,
$$\boxed{\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2).} \qquad (4)$$
Таким образом,
$$\lambda=10r(-0{,}01)\approx 10(1-0{,}005-$$
$$-0{,}0000125)=10(0{,}9949875)=$$
$$=9{,}949875.$$

Покажем теперь, как нужно действовать в «плохом» случае. В качестве иллюстрации разберем

Пример 4. *Найдем приближенное значение корня* $\mu=\sqrt{2}$.

Ясно, что найденная нами формула (4), дающая $\sqrt{2}$ при $x=1$, для вычисления корня совершенно не подходит, поскольку x не является малым, и мы не можем рассчитывать, что слагаемые в правой части (4) быстро убывают. Чтобы свести дело к «хорошему» случаю, подберем два полных квадрата, отношение которых близко к 2. Такими квадратами являются, например, 25 и 49. Тогда
$$\mu=\sqrt{2}=\frac{7}{5}\sqrt{\frac{50}{49}}=\frac{7}{5}\nu.$$
Вычисление ν — это уже «хороший» случай, так как под знаком радикала стоит число близкое к 1 (полное квадрату). Запишем ν в виде:
$$\nu=(1-0{,}02)^{-\frac{1}{2}}$$
и рассмотрим функцию $S(x)=$ $=1/\sqrt{1+x}$. Тогда $\nu=S(-0{,}02)$. Допустим снова, что имеет место формула вида
$$S(x)=a+bx+cx^2+o(x^2).$$
Устремляя x к нулю, получаем $a=1$. Возводим обе части в квадрат и умножаем на знаменатель,
$$1=(1+x)(a^2+2abx+(b^2+2ac)x^2+$$
$$+o(x^2)),$$
$$1=a^2+(a^2+2ab)x+(b^2+2ab+2ac)\times$$
$$\times x^2+o(x^2).$$
Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях последнего равенства, получим
$$a^2=1,\ a^2+2ab=0,\ b^2+2ab+2ac=0.$$
Учитывая, что $a=1$, находим: $b=-1/2$; $c=3/8$. Итак,
$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2).} \qquad (5)$$
Таким образом,
$$\mu=\sqrt{2}=(7/5)S(-0{,}02)\approx$$
$$\approx 1{,}4(1+0{,}01+0{,}00015)=1{,}41421.$$

Формула Тейлора для многочленов

Пусть дан многочлен степени n:
$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n.$$
Тогда имеет место следующая замечательная формула:
$$\boxed{\begin{aligned}p(x)=p(0)+p'(0)x+\frac{1}{2!}p''(0)x^2+\ldots\\ \ldots+\frac{1}{n!}p^{(n)}(0)x^n.\end{aligned}} \qquad (6)$$

в которой $p^{(n)}$ обозначает n-ую производную функции p, а символ $n!$ (читается «эн факториал») расшифровывается так: $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$. Например, при $n=2$, $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, поэтому $p'(x)=2a_2x+a_1$, $p''(x)=2a_2$, значит, $p'(0)=a_1$, $p''(0)=2a_2$ и поэтому, действительно,

$$p(x)=p(0)+p'(0)x+\frac{1}{2}p''(0)x^2=a_0+a_1x+a_2x^2.$$

В общем случае формула (6) проверяется непосредственно. Советую читателю не полениться и проделать эту проверку, начав «для разминки» со случая $n=3$.

Формула Тейлора для функций

Пользуясь правилами (б), и (г), формулу (6) можно переписать в виде

$$p(x)=p(0)+p'(0)x+\frac{p''(0)x^2}{2}+\ldots+\frac{p^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+o(x^{n-1}).$$

Эта формула полезна для приближенных вычислений в том случае, когда x^n пренебрежимо мало. Однако она нас интересует здесь по другой причине: оказывается, эта формула верна не только для многочленов $p(x)$, но и для произвольных функций $f(x)$ (лишь бы они имели производные $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n+1)}(x)$ до порядка $n+1$ включительно). Соотношение

$$\boxed{f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)} \qquad (7)$$

называется *формулой Тейлора (или Маклорена)* по имени двух английских математиков XVII—XVIII веков, хотя по существу была известна еще и Ньютону. Мы не будем доказывать эту формулу в общем виде, а получим такие разложения более простыми средствами, как мы уже это делали ранее.

Формула Тейлора для дробно-рациональных функций (метод неопределенных коэффициентов)

Дробно-рациональной называют всякую функцию, которая представляется в виде отношения двух многочленов. Разберем на конкретном примере, как получить разложение Тейлора для таких функций.

Пример 5. Разложим по формуле Тейлора до $o(x^3)$ функцию

$$f(x)=\frac{1+x}{1+x+x^2}.$$

Первый способ. Рассмотрим функцию $g(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$. Введем новую переменную $t=x+x^2$. По формуле (2), где $q=-t$, можем написать

$$g(x)=\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+o(t^3)=1-(x+x^2)+(x+x^2)^2-(x+x^2)^3+o(x^3)=1-x+x^3+o(x^3).$$

Итак,

$$f(x)=(1+x)(1-x+x^3+o(x^3))=1-x^2+x^3+o(x^3).$$

Второй способ (метод неопределенных коэффициентов). Пусть

$$f(x)=\frac{1+x}{1+x+x^2}=a+bx+cx^2+dx^3+o(x^3).$$

Умножим обе части на знаменатель:

$$1+x=(1+x+x^2)(a+bx+cx^2+dx^3+o(x^3)),$$

$$1+x=a+(a+b)x+(a+b+c)x^2+(b+c+d)x^3+o(x^3).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях последнего равенства, получим $a=1$, $a+b=1$; $a+b+c=0$; $b+c+d=0$. Таким образом, $a=1$, $b=0$, $c=-1$, $d=1$, и мы приходим к прежнему результату.

Формула Тейлора для тригонометрических функций

Наша цель — доказать следующие формулы, не пользуясь общей формулой Тейлора (7).

$$\boxed{\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5),} \qquad (8)$$

$$\boxed{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4).} \qquad (9)$$

Эти разложения будут получены в несколько шагов.

Первый шаг (нахождение старших членов разложений). Из школьного учебника известно, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Пусть $o(1)$ обозначает функцию от x, стремящуюся к нулю при $x\to 0$. Теперь эту формулу можно записать в виде

$$\frac{\sin x}{x}=1+o(1).$$

Умножая на x, получим

$$\sin x=x+o(x).$$

Найдем теперь предел

$$\alpha=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Так как $1-\cos x=2\sin^2(x/2)$, получаем

$$\alpha=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}+o(1).$$

Теперь мы можем написать

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}+o(1).$$

Откуда находим

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

Второй шаг (использование четности и нечетности). Докажем, что в разложении нечетной функции коэффициенты при четных степенях x равны нулю. Пусть $f(x)$ — нечетная функция. Тогда

$$f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\frac{1}{2}[(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)-(a_0-a_1x+a_2x^2-\ldots)]=$$
$$=a_1x+a_3x^3+\ldots$$

Аналогично можно доказать, что в разложении *четной* функции коэффициенты при *нечетных* степенях x равны нулю.

Третий шаг (использование тождества и метода неопределенных коэффициентов). Итак, мы можем написать

$$\sin x=x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^5).$$

Для нахождения a_3 и a_5 воспользуемся тождеством

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x.$$

Подставляя разложения, получаем

$$3x+a_3(3x)^3+a_5(3x)^5+o(x^5)=$$
$$=3(x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^5))-$$
$$-4)(x+a_3x^3+o(x^3))^3,$$
$$3x+27a_3x^3+243a_5x^5+o(x^5)=$$
$$=3x+(3a_3-4)x^3+(3a_5-12a_3)\times$$
$$\times x^5+o(x^5).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях последнего равенства, получим

$$27a_3=3a_3-4,243a_5=3a_5-12a_3.$$

Тогда

$$a_3=-\frac{1}{6}=-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}=-\frac{1}{3!},$$

$$a_5=\frac{1}{120}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{5!}.$$

Аналогично для $\cos x$ напишем

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+a_4x^4+o(x^4)$$

$$\cos 2x=2\cos^2x-1.$$

$$1-\frac{1}{2}(2x)^2+a_4(2x)^4+o(x^4)=$$
$$=2\left[1-x^2+\left(2a_4+\frac{1}{4}\right)x^4+o(x^4)\right]-1,$$
$$1-2x^2+16a_4x^4+o(x^4)=$$
$$=1-2x^2+\left(4a_4+\frac{1}{2}\right)x^4+o(x^4).$$

Откуда

$$a_4=\frac{1}{24}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{4!}.$$

Формулы (8) и (9) доказаны.

Упражнения

3. Вычислите $\sqrt{7}$ и $\sqrt{3}$, пользуясь представлениями $\sqrt{3}=\frac{5}{3}\sqrt{\frac{27}{25}}=\frac{5}{3}(1+0{,}08)^{1/2}$, $\sqrt{7}=\frac{8}{3}\sqrt{\frac{63}{64}}=\frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{64}\right)^{1/2}$ и разложением (7).

4. Улучшите найденное значение $\sqrt{2}$, продолжив формулу (4) до $o(x^4)$.

5. Получите разложение (9) для функции $\cos x$, исходя из тождества $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$ и формулы (8).

6. Методом неопределенных коэффициентов найдите разложение функции $y=\operatorname{tg} x$ до $o(x^5)$.

7. Пользуясь тождеством $e^{2x}=(e^x)^2$ и неопределенными коэффициентами, улучшите формулу $e^x=1+x+o(x)$, доведя разложение до $o(x^5)$.

8. Комбинируя разложения (4) и (9), получите формулу

$$\sqrt{\cos x}=1-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{96}+o(x^5).$$

О функциях распределения

(или Как поливать огород при помощи ветра)

Доктор технических наук
А. Л. СТАСЕНКО

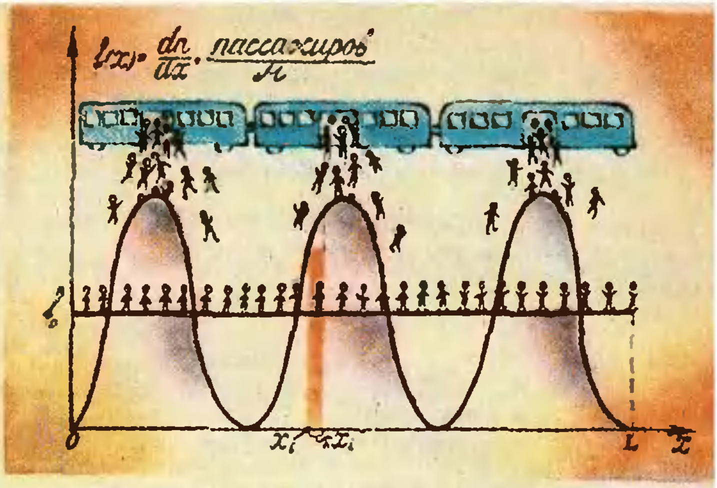


Рис. 1.

«На платформе, в ожидании поезда, пассажиры должны размещаться равномерно по длине поезда...»
(Из «Правил пользования Московским метрополитеном им. В. И. Ленина»)

Фраза из эпиграфа, «житейский» смысл которой вполне ясен, приводит на память широко распространенное в физике понятие функции распределения. С функциями распределения мы сталкиваемся при решении теоретических и практических задач, в которых рассматриваются системы с большим числом частиц. Чтобы провести аналогию между требованием «Правил» и понятием функции распределения, «переведем» эпиграф на язык математики.

Разобьем платформу (точнее, ту ее часть, возле которой останавливается поезд) последовательно на участки длины Δx_1, Δx_2, ..., Δx_k, ..., Δx_m. Обозначим числа пассажиров, стоящих в ожидании поезда на каждом из участков, через Δn_1, Δn_2, ..., Δn_k, ..., Δn_m. Тогда «Правила» требуют, чтобы отношение Δn_i к Δx_i было одним и тем же для любого $i=1, 2, ..., k, ..., m$, то есть

$$\frac{\Delta n_i}{\Delta x_i}=f_0=\text{const}. \qquad (1)$$

Мы обозначили это отношение буквой f, чтобы подчеркнуть, что вообще-то это может быть и какая-то функция от x; но в данном случае, при хорошем поведении граждан на платформе, эта функция должна быть постоянной (f_0). На рисунке 1 приведен ее график — прямая линия.

Но вот подошел поезд, и еще до того, как откроются двери вагонов, около них собираются «сгустки» граждан. Тогда их распределение вдоль платформы уже не равномерное, и его можно качественно представить в виде кривой $f(x)$, как на рисунке 1. Если число граждан за время ожидания поезда не изменилось, этот факт должен как-то отразиться на этих двух графиках. Действительно, во время ожидания на каждом участке Δx_i платформы, согласно (1), число граждан было равно

$$\Delta n_i=f_0\cdot\Delta x_i;$$

значит, чтобы найти полное число пассажиров на всей платформе, нужно сложить их количества на каждом участке. Получим

$$N=\sum_{i=1}^{m}\Delta n_i=\sum_{i=1}^{m}f_0\cdot\Delta x_i=$$
$$=f_0\sum_{i=1}^{m}\Delta x_i=f_0\cdot L, \qquad (2)$$

где L — длина платформы. Как видно из рисунка 1, f_0L есть площадь прямоугольника высоты f_0 и длины L. И это есть полное число пассажиров N. Когда после подхода поезда их распределение по платформе изменилось и стало некоторой функцией $f(x)$, сумма всех величин $f(x_i)\cdot\Delta x_i$ — это тоже площадь под кривой $f(x)$ и по-прежнему это полное число граждан N:

$$\sum_i f(x_i)\cdot\Delta x_i=N. \qquad (3)$$

Просто раньше $f(x)$ была постоянной f_0, и в формуле (2) мы ее вынесли за знак суммы, а теперь этого сделать нельзя — на каждом участочке Δx_i

свое число граждан (они перераспределились).

«Ба! — воскликнет математик (он просто обязан так воскликнуть), — да ведь то́, что написано в (1), в пределе, когда отрезки Δx_i становятся все меньше и меньше, переходит в то, что называется производной от n по x:

$$f(x_i)=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\Delta n_i}{\Delta x_i}=\frac{dn}{dx},$$

а то, что написано в (3), — в интеграл от $f(x)$ по всей длине L платформы:

$$N=\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\Delta x_i=\int_0^L f(x)dx.»$$

И, воскликнув так, он будет совершенно прав.

Итак, распределение граждан по платформе в ожидании поезда можно описать функцией $f(x)=\frac{dn}{dx}$, которую естественно так и назвать: функция распределения пассажиров по длине платформы.

Теперь, возможно, воскликнет читатель: «Да ведь этак можно самую обыкновенную скорость материальной точки, то есть производную от перемещения по времени —

$$\vec{v}=\frac{d\vec{s}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t},$$

— назвать распределением смещений точки во времени; ускорение —

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

— распределением скоростей во времени; а обыкновенную плотность вещества, то есть производную от массы по объему —

$$\rho=\frac{dm}{dV}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta V},$$

— распределением массы по объему!?» Все это так, и все же слово «распределение» несет в физике и в быту свою смысловую нагрузку. Говорят, например, о распределении молекул газа по модулю скорости $\left(\frac{dn}{dv}\ \frac{\text{молекул}}{\text{м/с}}\right)$; о распределении продуктов среди населения $\left(\frac{dm}{dn}\ \frac{\text{кг}}{\text{человек}}\right)$, а не о «производной от массы продуктов по числу граждан»; о распределении школьников по возрасту $\left(\frac{dn}{dt}\ \frac{\text{школьников}}{\text{лет}}\right)$. Наверное, где-то в 10 классе это, последнее, распределение имеет вид, изображенный на рисунке 2: максимум функции $f(t)$ соответствует (приблизительно) 17 годам; маловероятно встретить в 10 классе кого-либо (даже очень способного) из детского сада или в пенсионном возрасте — поэтому функция распределения довольно быстро стремится к нулю по обе стороны от максимального значения.

Очень интересна (особенно, наверное, для десятиклассников) функция распределения абитуриентов по числу задач, решенных ими на вступительных экзаменах. Как правило, эта функция графически может быть представлена либо кривой I, либо кривой II на рисунке 3. Если это кривая I, то ее минимум в точке A легко позволяет установить «цену» удовлетворительной оценки — все, кто слева от точки A, не проходят. Если же это кривая II, то экзаменаторам приходится думать, какое число решенных задач считать достаточным для удовлетворительной оценки.

Важность функций распределения в физике подчеркивает и тот факт,

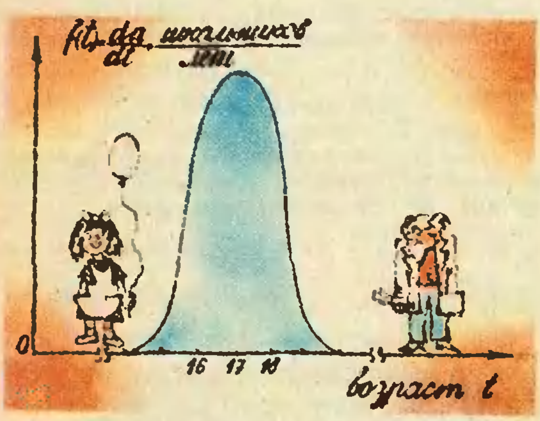


Рис. 2.

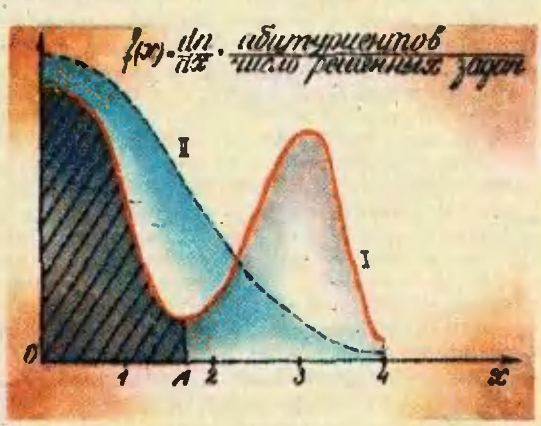


Рис. 3.

что многие из них связаны с именами замечательных ученых: есть, например, распределения Больцмана и Максвелла (молекул газа по скоростям), распределение Планка (квантов излучения по их частотам), распределение Ферми (электронов по энергиям).

Теперь, научившись понимать смысл функции распределения, решим одну полезную задачу. Предположим, нам нужно равномерно полить водой горизонтальный участок земли, скажем, большой огород или поле. Конечно, это можно сделать с помощью ведер или леек, так сказать, «пешком»; можно ездить между грядками на тракторе, оснащенном специальным агрегатом — поперечной трубой с отверстиями и форсунками, в которую подается вода (так устроены «фрегаты», которые часто можно видеть в полях). Но мы попробуем использовать ветер, который почти всегда дует в больших открытых пространствах.

Расположим горизонтальную трубу, снабженную форсунками, на высоте h над землей. По этой трубе под давлением подается вода, которая «распыляется» на капли, летящие во всех направлениях. Радиусы капель могут быть различными, причем, мы можем управлять набором капель, то есть функцией их распределения по собственным радиусам $\left(f(r)=\frac{dn}{dr}\right)$. Наша задача: найти, какой должна быть функция $f(r)$, чтобы орошаемая площадь поливалась равномерно (то есть на любые участки одинаковых площадей попадали одинаковые массы воды).

Прежде всего нам надо разобраться, как будут двигаться вылетающие из трубы капли. Конечно, все они имеют какую-то начальную скорость; но если капли достаточно мелкие, они быстро затормозятся в воздухе и, в отсутствие ветра, осядут почти под самой трубой на узкую полоску земли, параллельную трубе. Чтобы пояснить сказанное, рассмотрим каплю радиуса r, выброшенную из трубы вертикально вниз. Движение капли в дальнейшем происходит под действием силы тяжести mg и силы сопротивления f_c со стороны воздуха. Сила сопротивления f_c зависит от скорости капли и от ее радиуса — она тем больше, чем больше v и чем больше r, в частности, для мелких капель $f_c=bvr$, где b — некоторый коэффициент пропорциональности. (Эту силу называют силой Стокса — по имени английского физика и математика XIX века Дж. Стокса, исследовавшего движение тел в вязкой среде. Такая зависимость $f_c(v, r)$ верна как раз для очень мелких капель, для которых воздух является такой же вязкой средой, как, скажем, мед — для оседающей в нем дробинки.)

Запишем уравнение движения нашей капли:

$$ma=mg-bvr, \text{ или } a=g-\frac{b}{m}vr,$$

где a — ускорение капли. Подставив в выражение для a массу капли $m=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$, получим:

$$a=g-\frac{3b}{4\pi\rho}v\frac{1}{r^2}.$$

Видно, что модуль ускорения, сообщаемого капле силой сопротивления $\left(\text{величина } \frac{3b}{4\pi\rho}|v|\frac{1}{r^2}\right)$, тем больше, чем меньше размер капли; значит, мелкие капли быстро затормозятся в воздухе и будут падать с постоянной скоростью v_n, которую легко определить из условия $a=0$ (или $f_c=mg$):

$$a=0 \Rightarrow v=\frac{4}{3}\pi\rho g\frac{1}{b}r^2=\alpha r^2 \left(\alpha=\frac{4}{3}\pi\rho g\frac{1}{b}\right).$$

Теперь вспомним про ветер и вернемся к нашему огороду.

Пусть ветер дует в направлении, перпендикулярном трубе, с постоянной скоростью u. Можно показать, что и в этом случае, какова бы ни была начальная скорость выбрасываемых мелких капель, все они быстро вовлекутся в горизонтальное перемещение с постоянной скоростью, равной скорости ветра. Так что движение каждой капли мы будем рассматривать как сумму движений в горизонтальном направлении с постоянной скоростью u и в вертикальном направлении с постоянной скоростью $v=\alpha r^2$. Поскольку оба движения капли — падение и перенос ветром — равномерные, все капли будут двигаться по прямым (рисунок 4).

Время движения до земли тем больше, чем меньше радиус капли: $t(r)=\frac{h}{v(r)}=\frac{h}{\alpha r^2}$, так что мелкие капли (радиуса r_1) упадут на землю дальше от источника, чем более крупные (радиуса $r_2>r_1$):

$$x(r)=u\cdot t(r)=u\frac{h}{\alpha r^2}. \qquad (4)$$

На какой участок Δx упадут все капли, радиусы которых отличаются от данного r на малую величину Δr? Поскольку, как видно из (4), $\frac{\Delta x}{\Delta r}=-\left(u\frac{2h}{\alpha}\right)\frac{1}{r^3}$ (мы продифференцировали функцию $x(r)$),

$$\Delta x=-\left(u\frac{2h}{\alpha}\right)\frac{1}{r^3}\cdot\Delta r$$

(знак «минус» говорит об уже известном нам факте: если радиус капли больше r ($\Delta r>0$), она упадет ближе к источнику ($\Delta x<0$), и наоборот).

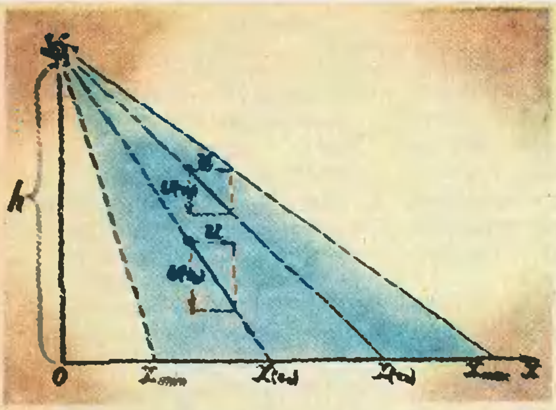


Рис. 4.

Теперь посмотрим, какая масса воды попадет на участок Δx. Пусть число капель, радиусы которых лежат в интервале от r до $r+\Delta r$, равно $\Delta n(r)$. Величину Δr мы выберем столь малой, что массы капель можно считать одинаковыми и равными $m(r)=\frac{4}{3}\pi r^3\varrho$. Тогда масса воды, которую принесут эти капли на землю, равна

$$\Delta M=m(r)\cdot\Delta n(r)=\frac{4}{3}\pi r^3\varrho\cdot\Delta n(r).$$

Наконец, сформулируем требование равномерности полива:

$$\frac{\Delta M}{\Delta x}=-\frac{4\pi r^3\varrho u r^3}{6uh}\,\frac{\Delta n(r)}{\Delta r}=$$

$$=-\frac{2\pi\varrho u}{3uh}\,r^6\,\frac{\Delta n(r)}{\Delta r}=C, \qquad (5)$$

где C — константа. Но ведь $\frac{\Delta n(r)}{\Delta r}$ в пределе ($\Delta r\to 0$) и есть искомая нами функция распределения капель по их радиусам!

$$\text{Итак, } f(r)=\lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta n(r)}{\Delta r}=K\frac{1}{r^6}\text{, то есть}$$

$$f(r)\sim r^{-6}. \qquad (6)$$

Это очень крутая зависимость. Допустим, мы выбрали два одинаковых интервала радиуса капли Δr вблизи двух различных значений, соответствующих мелким (r_1) и крупным (r_2) каплям. Пусть их радиусы отличаются в два раза: $r_2=2r_1$. Тогда из (6) следует вывод: внутри этого интервала Δr число мелких капель $\Delta n(r_1)$ должно быть в $(r_2/r_1)^6=2^6=64$ раза больше, чем число крупных ($\Delta n(r_2)$).

Теперь, зная длину поливаемого участка $L=x_{max}-x_{min}$ (см. рисунок 4), можно найти с помощью формулы (4) наименьший и наибольший радиусы капель r_{min} и r_{max}, их полное число (формула (2)) и полную массу воды, «выдаваемой» в единицу времени источником (в частности, в постоянную C в формуле (5) вошла и ширина участка — ведь ясно, что полная масса воды должна быть пропорциональна ширине поливаемого участка, но чтобы избавиться от этой тривиальной мысли, можно считать, что мы провели рассуждения в расчете на единицу его ширины, или на единицу длины трубы). Все эти практические расчеты можно сделать, потому что мы нашли характер функции распределения капель по размерам. И не обязательно капель воды для полива: это может быть раствор ядохимикатов для борьбы с вредными насекомыми или сорными травами, или взвесь мелких семян, или капли краски для покрытия больших площадей, или...

Итак, мы нашли ту функцию распределения капель по их размерам, которую должен стараться «обеспечить» конструктор при помощи набора форсунок.

А что мы не учли в своем решении? Многое: ну, например, что ветер дует не всегда равномерно, а порывами; и даже если равномерно, то его скорость по высоте над землей тоже как-то меняется; что капли, особенно мелкие (они долгое время находятся в «полете»), могут испаряться, и т. д. Всякая физическая модель имеет свои рамки, внутри которых она справедлива, а за которыми она требует уточнений, усложнений, а может быть, и совсем «не работает».

Советуем купить

В 1985 году в научно-популярной серии для школьников «Библиотечка «Квант» издательства «Наука» будут изданы следующие книги:

Вып. 37. Г. С. Воронов. Штурм термоядерной крепости.

Вып. 39. В. Б. Брагинский, А. Г. Полнарев. Удивительная гравитация.

Вып. 40. С. С. Хилькевич. Физика вокруг нас.

Вып. 41. Г. А. Звенигородский. Первые уроки программирования.

(Окончание см. на с. 53)

Пульсирующее Солнце

«Солнечный круг, небо вокруг», — каждый знает, что такое Солнце, и может изобразить его. А как устроено Солнце?

«Я сделал шар из ваты, пропитал спиртом и зажег. Недурно горело, а?» — так смоделировал Солнце «великий и ужасный» волшебник Гудвин из книги А. Волкова «Волшебник Изумрудного города». Идея неплохая, но такое солнце, конечно же, потухло бы через несколько минут.

Сегодня физики знают, что в реальном Солнце «горит» термоядерное горючее. Ядра водорода (протоны) объединяются с нейтронами, образуя ядра гелия, при этом выделяется колоссальная энергия. Но это — общий принцип, а многие детали процесса до сих пор установить не удается. Более того, в науке о нашем светиле есть немало противоречий.

Известно, например, что в термоядерных реакциях рождаются нейтрино — самые легкие и неуловимые частички из обширного семейства элементарных частиц. Несмотря на фантастическую неуловимость нейтрино, физики научились их регистрировать, а научившись, решили выяснить, сколько же их летит от Солнца. Оказалось, что зарегистрированный поток нейтрино от Солнца в три раза меньше, чем должен был быть, если рассчитывать его по гипотезе термоядерных реакций. В чем же дело? Есть и другие вопросы. Один из них связан с изменением светового потока, посылаемого Солнцем на Землю; физики считают, что за время существования нашей планеты мощность излучения Солнца должна была бы увеличиться по крайней мере на 20—30 процентов, а геологи и палеоклиматологи (специалисты по климату прошлых эпох) считают, что этого не было.

Все сходились в одном: необходимо пристальное внимание к Солнцу и его тщательнейшее изучение.

Стали присматриваться повнимательнее и, как это часто бывает в науке, вместо ответов на поставленные вопросы обнаружили новые неожиданные противоречия. Началось все с того, что американские физики Р. Дикке и Г. Гольденберг решили проверить, действительно ли Солнце — шар. Из результатов их измерений следовало, что Солнце сплюснуто. Эта «находка» совсем уж не вписывалась ни в какие теории, и ее стали перепроверять в разных странах.

Тщательные исследования в этом направлении были начаты примерно десять лет назад в Крымской астрофизической обсерватории АН СССР. Советские астрофизики под руководством академика А. Б. Северного обнаружили удивительное и неизвестное ранее явление — колебания диаметра Солнца. Оказывается, Солнце периодически расширяется и сжимается, то есть пульсирует. Частота «солнечного пульса» — один раз в 160 минут, а амплитуда пульсаций составляет тысячные доли процента.

Чтобы обнаружить столь незначительные пульсации Солнца, пришлось разработать специальную методику сверхточных измерений. Основана она на эффекте Доплера: если источник света приближается к наблюдателю, частота света увеличивается (длина волны уменьшается), а если удаляется — частота уменьшается (длина волны увеличивается). (Нечто подобное вы могли наблюдать на платформе пригородных поездов: гудок приближающейся электрички более высокого тона, чем гудок удаляющейся.) Направив спектрограф на солнечный диск, ученые обнаружили периодические смещения спектральных линий, причем смещения очень незначительные — на одну миллиардную долю длины световой волны.

В настоящее время пульсации Солнца регулярно наблюдаются во многих районах земного шара. Официальное открытие периодических пульсаций Солнца было зарегистрировано летом позапрошлого года.

Отчего же Солнце пульсирует? На этот вопрос ответить оказалось совсем непросто. Наиболее приемлемое объяснение предложили английские физики. Очевидно, что термоядерные реакции идут лучше всего в центральной части Солнца, где наивысшая температура, и там водород — «термоядерное горючее» — постепенно выгорает. Из-за разности концентраций водород начинает подтекать к центру из внешних слоев. Такой «подток» может привести к возникновению сферической волны от центра к поверхности Солнца. Правда, количественные расчеты, основанные на такой модели, дают период пульсаций 120 минут, но в качестве первого приближения это вполне удовлетворительно.

Вот так пристальное внимание к Солнцу не ответило на стоящие перед учеными вопросы, а привело к открытию целой новой области «солнцеведения» — гелиосейсмологии. Теперь, изучая пульсации поверхности Солнца, можно надеяться на новую информацию об устройстве его внутренних слоев.

А. В. Семенов

Диофантово уравнение А. А. Маркова

Член-корреспондент АН СССР М. Г. КРЕЙН

В этой статье рассказана история одного уравнения в целых числах и приводится его решение. Решение использует лишь простейшие свойства целых чисел и теорему Виета для квадратного трехчлена, и потому доступно восьмиклассникам. Оно основано на ряде задач «на доказательство», разбор которых мог бы составить предмет занятия математического кружка. (Подробные доказательства вы найдете в конце следующего номера журнала.)

В 1879 году в Петербургском университете молодой человек 23 лет защитил магистерскую диссертацию под названием «О бинарных квадратичных формах положительного определителя». В ней решались труднейшие вопросы теории чисел и она определила новое направление в этой теории. Ее автором был будущий знаменитый академик Андрей Андреевич Марков (1856—1922).

В основу диссертации были положены две его статьи, опубликованные в Германии в 1879 и 1880 годах в одном из наиболее известных в мире математических журналов — "Mathematische Annalen". Несмотря на это, прошло более 30 лет, прежде чем на западе «открыли» работы Маркова. В 1913 году крупный немецкий математик Георг Фробениус (1849—1917) опубликовал мемуар под названием «О числах Маркова». В предисловии к нему он написал, что вопреки тому, что исследования А. А. Маркова являются «чрезвычайно замечательными и важными», они, по-видимому, остались мало известными. Г. Фробениус объяснил это сложностью их изложения (А. А. Марков систематически пользовался непопулярным для того времени в этих вопросах аппаратом *непрерывных дробей*)*).

Разумеется, настоящая статья не ставит себе целью дать хоть какое-либо представление о глубоких исследованиях А. А. Маркова. Но дело в том, что в своих построениях А. А. Марков неожиданно пришел к вспомогательному диофантову уравнению (называемому теперь его именем), имеющему вид

$$x^2+y^2+z^2=3xyz. \qquad (1)$$

И вот — сенсация! А. А. Марков получил описание всех решений уравнения (1), пользуясь только средствами школьной математики (среди них существенную роль сыграла теорема Виета для квадратного трехчлена). Но прежде чем разобрать решение уравнения (1), стоит сказать несколько слов вообще

О диофантовых уравнениях

Как известно, *диофантовым уравнением* для целочисленных переменных x, y, ..., w называется уравнение, которое может быть приведено к виду

$$P(x,\ y,\ ...,\ w)=0,$$

где P — некоторый многочлен от указанных переменных с целыми коэффициентами.

Иногда к диофантовым уравнениям приводят сравнительно простые вопросы. Например, решая вопрос о том, каким способом сумму в n копеек можно разменять на монеты достоинством в 1, 2, 3 и 5 копеек, мы придем к диофантову уравнению:

$$x+2y+3z+5w=n^{**}).$$

По-видимому, еще в Древнем Вавилоне родилась задача о построении прямоугольного треугольника с попарно соизмеримыми сторонами. Соизмеримость сторон означает, что найдется такой масштаб, в котором катеты и гипотенуза будут выражаться натуральными числами x, y и z, но тогда

---

*) О непрерывных (или цепных) дробях можно прочитать в «Кванте», 1983, № 5, с. 16 и № 6, с. 26.

**) О решении этого уравнения см. «Квант», 1984, № 5, с. 11.

$$x^2+y^2=z^2.$$

Таким образом, вавилонская задача сводится к задаче построения всех троек натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющих предыдущему уравнению. Пифагорейцы нашли способ построения всех его решений. Но, возможно, этот способ был найден еще раньше в Вавилоне и Индии. Так или иначе, решения (x, y, z) уравнения $x^2+y^2=z^2$ принято называть *пифагоровыми тройками* *).

Задача об отыскании всех решений даже простого на вид диофантова уравнения, как правило, сложная. Известно, что нет единообразного способа (общего алгоритма) для выяснения даже того, имеет ли диофантово уравнение решения в целых числах, или нет **). Поиски решений конкретных диофантовых уравнений продолжаются и в наши дни; здесь с помощью сложного аппарата современной алгебраической геометрии в самые последние годы достигнуты значительные успехи ***). Однако интересующее нас уравнение Маркова (1) решается элементарно — вернемся к нему.

Родословное дерево уравнения Маркова

Упорядоченная тройка целых чисел (a, b, c) называется *решением* диофантова уравнения с переменными x, y, z, если это уравнение при $x=a$, $y=b$, $z=c$ превращается в верное числовое равенство. Числа a, b, c решения (a, b, c) будем называть *координатами* решения. Для уравнения Маркова (1) мы условимся рассматривать только те решения, у которых нет нулевых координат, иными словами, тройку $(0, 0, 0)$ мы будем исключать из решений (легко видеть, что если равна нулю одна из координат решения уравнения (1), то и остальные координаты решения равны нулю).

Левая часть (1) положительна для любого решения (a, b, c), поэтому либо все a, b, c положительны, либо два из них отрицательны. В последнем случае переход от (a, b, c) к $(|a|, |b|, |c|)$ приводит к решению уравнения (1) с положительными координатами. Обратно, если все координаты решения (a, b, c) положительны, то, изменив знак у каких-либо двух координат, мы снова получим решение. Поэтому в дальнейшем без ограничения общности мы будем рассматривать только решения (a, b, c) с положительными координатами.

Из симметричности уравнения (1) следует, что если (a, b, c) — решение уравнения (1), то решениями будут:

$$(a, b, c), (c, a, b), (b, c, a),$$
$$(b, a, c), (a, c, b), (c, b, a),$$

то есть вместе с (a, b, c) решениями будут все тройки, получаемые различными перестановками координат данного решения.

Ввиду этого мы можем условиться все шесть решений уравнения Маркова, получающихся друг из друга перестановками, считать одним решением, то есть считать, что для решения существенны лишь значения координат, а не их порядок.

Уравнение Маркова имеет очевидное решение $(1, 1, 1)$. Сейчас мы выясним, как, зная какое-либо решение, можно находить другие решения. Если (a, b, c) — решение уравнения Маркова, то можно утверждать, что a есть корень квадратного уравнения

$$\Phi_a(x)=x^2+b^2+c^2-3bcx=0.$$

Но по теореме Виета это уравнение будет иметь еще одни корень $x=a'$, такой, что

$$a+a'=3bc,\ aa'=b^2+c^2. \qquad (2)$$

Очевидно, $a'>0$ и (a', b, c) также является решением уравнения (1). Оно называется *соседним решением по координате* a. Очевидно, если (a', b, c) — соседнее решение для (a, b, c), то (a, b, c) является соседним по координате a' решением для (a', b, c).

Аналогично вводятся решения, соседние по координате b и по координате c.

Найдем решение, соседнее по координате 1 решению $(1, 1, 1)$. Для этого нужно решить квадратное уравнение

*) О пифагоровых тройках и о решении некоторых других диофантовых уравнений см.: А. О. Гельфонд. Решение уравнений в целых числах, 4-е изд. — М.: Наука, 1973. О. Оре. Приглашение в теорию чисел. — М.: Наука, 1980. — (Серия: Библиотечка «Квант»).

**) См. «Квант», 1970, № 7, с. 39.

***) См. «Квант», 1983, № 3, с. 19.

$$x^2+1^2+1^2-3\cdot1\cdot1\cdot x=0.$$

Кроме корня $x=1$, это уравнение имеет корень $x=2$. Таким образом, получено еще одно решение (2, 1, 1). В дальнейшем решения (1, 1, 1) и (2, 1, 1) будут играть существенную роль. Назовем их, следуя Маркову, *сингулярными*.

Сингулярные решения выделяются из множества всех решений следующим свойством.

Задача 1. Если у решения (a, b, c) уравнения Маркова две из координат равны, то в этом и только этом случае решение является сингулярным. Докажите это.

Первое сингулярное решение (1, 1, 1) имеет только одно соседнее решение. Второе сингулярное решение имеет два соседних: одно из них — (1, 1, 1), другое (соседнее по координате 1), получается из уравнения

$$2^2+y^2+1^2=3\cdot2\cdot y\cdot1$$

и имеет вид (2, 5, 1). В свою очередь, решение (2, 5, 1) имеет три соседних: одно, естественно (2, 1, 1) и два новых — (13, 5, 1) и (2, 5, 29). Вообще, каждое несингулярное решение (a, b, c) порождает три соседних

$$(a', b, c),\ (a, b', c),\ (a, b, c'),$$

где (сравните с (2))

$$a'=3bc-a,\quad b'=3ac-b,\quad c'=3ab-c.$$

Задача 2. Если решение (a, b, c) несингулярно, то одно из его соседних решений имеет ме́ньшую максимальную координату, а два других — бо́льшую. Докажите это.

Теорема Маркова. *Любое решение уравнения* (1) *соединяется цепочкой соседних решений с сингулярным решением* (1, 1, 1).

Доказательство. Пусть (a, b, c) — решение уравнения Маркова, отличное от сингулярного. Тогда у него есть соседнее решение (a_1, b_1, c_1) с меньшей максимальной координатой (задача 2). Если это решение также несингулярно, то оно порождает решение (a_2, b_2, c_2) с еще меньшей максимальной координатой, и так далее. Так как из натуральных чисел нельзя образовать бесконечную убывающую последовательность, то этот процесс должен закончиться, и закончится он тогда, когда мы придем к некоторому решению (a_n, b_n, c_n), у которого есть равные координаты, то есть (задача 1) к сингулярному. Если оно (1, 1, 1), то теорема доказана, если же это решение (2, 1, 1), то остается вспомнить, что соседним решением для (2, 1, 1) по координате 2 будет (1, 1, 1). Теорема доказана.

Из теоремы Маркова следует, что, отправляясь от сингулярного решения (1, 1, 1), и последовательно переходя к соседним решениям с большим максимумом координат, мы получим все решения уравнения Маркова. При этом получается такая таблица — *родословное дерево* (см. рисунок). Эта таблица позволяет для данного N (>1) конечным числом действий найти все решения уравнения Маркова, координаты которых не превосходят N.

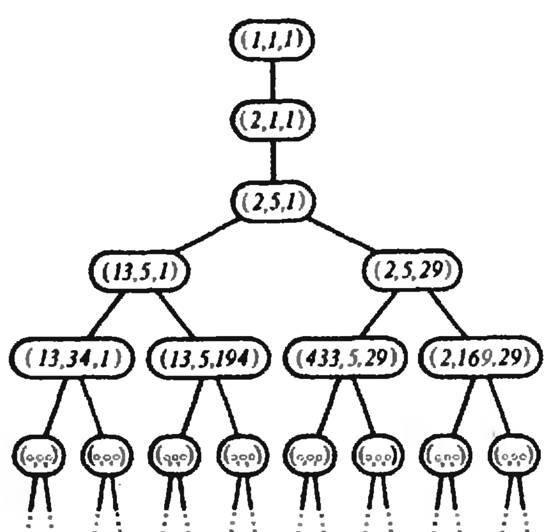
Задача 3. Докажите, что у каждого решения уравнения Маркова координаты попарно взаимно просты.

Исключительность уравнения Маркова

Поставим следующий вопрос, который, на первый взгляд, может показаться странным. *Если сумма квадратов трех натуральных чисел делится на их произведение, то каким может быть частное?*

Этот вопрос равносилен следующему: при каких натуральных k диофантово уравнение

$$X^2+Y^2+Z^2=kXYZ \tag{3}$$



имеет ненулевое решение? При $k=3$ это уравнение совпадает с уравнением Маркова. Легко видеть, что при $k=1$ уравнение (3) имеет решения, например (3, 3, 3). Проанализировав уравнение (3), Гурвиц и Фробениус пришли к разительному результату: уравнение (3) имеет решения только при $k=3$ и $k=1$. Этот результат также может быть получен элементарными средствами.

Начнем со случая $k=1$. При этом окажется, что отыскание решений уравнения (3) для $k=1$ сводится к отысканию решений уравнения Маркова.

Задача 4. Пусть A, B, C — натуральные числа. Тогда остаток от деления числа $A^2+B^2+C^2$ на 3 равен количеству неделящихся на 3 чисел среди A, B, C, если их меньше трех, и равен нулю в противном случае. Докажите это.

Задача 5. Все решения (A, B, C) уравнения

$$X^2+Y^2+Z^2=XYZ \qquad (4)$$

получаются по формулам

$$A=3a,\ B=3b,\ C=3c, \qquad (5)$$

где (a, b, c) — произвольное решение уравнения Маркова

$$x^2+y^2+z^2=3xyz. \qquad (6)$$

Докажите это.

Обратимся к случаю $k=2$.

Задача 6. Пусть A, B, C — натуральные числа. Тогда остаток от деления числа $A^2+B^2+C^2$ на 4 равен количеству нечетных чисел среди A, B, C. Докажите это.

Задача 7. Докажите, что уравнение (3) не имеет решений при $k=2$.

Теорема. *Уравнение* (3) *имеет ненулевое решение только при* $k=1$ *и* $k=3$.

Доказательство. При $k=1$ решения находятся в соответствии с задачей 5. При $k=2$ уравнение (3) не имеет решений в силу задачи 7. Остается рассмотреть случай $k>3$.

Допустим, что при некотором $k>3$ уравнение (3) имеет решение (a, b, c). Покажем, что координаты a, b, c этого решения попарно различны. Пусть, например, $b=c$; тогда $a^2=kab^2-2b^2=(ka-2)b^2$, так что $a=bd$, где d — целое. Отсюда $b^2d^2=(kbd-2)b^2$, $d^2=kbd-2$, $2=d(kb-d)$. Таким образом, 2 делится на d и, стало быть, $d=1$ или 2. В обоих случаях $kb=3$, что противоречит условию $k>3$.

Итак, у любого решения уравнения (3) при $k>3$ координаты попарно различны. Без ограничения общности можно считать, что $a>b>c$. Для решения (a, b, c) с помощью квадратного трехчлена

$$\Psi_a(x)=x^2+b^2+c^2-kxbc$$

образуем соседнее по координате a решение (a', b, c). Так как

$$\Psi_a(b)=2b^2+c^2-kb^2c<3b^2-kb^2c\leqslant 3b^2-kb^2<0,$$

мы видим, что b лежит между корнями a и a' многочлена $\Psi_a(x)$, то есть $a>b>a'$. Поэтому у решения (a', b, c) максимальная координата меньше максимальной координаты решения (a, b, c). Итак, по каждому решению (a, b, c) можно построить решение (a_1, b_1, c_1) с меньшей максимальной координатой. Это построение можно повторить, получив решение (a_2, b_2, c_2) с еще меньшей максимальной координатой. Так как у каждого решения координаты попарно различны, этот процесс можно продолжать неограниченно и получить бесконечную последовательность решений уравнения (3) со все меньшими и меньшими максимальными координатами. Но это невозможно, так как координаты — натуральные числа. Теорема доказана.

Следствие. *Для любого решения* (a, b, c) *уравнения Маркова числа* a, b, c *попарно взаимно просты.*

Доказательство. Если, например, a и b имеют общий делитель d (>1), то в силу уравнения (1), число d будет делителем и числа c. Следовательно, найдутся натуральные X, Y, Z такие, что $a=dX$, $b=dY$, $c=dZ$, и в силу (1) будем иметь $X^2+Y^2+Z^2=3dXYZ$, а это противоречит только что доказанной теореме.

Непосредственным обобщением уравнения Маркова на случай n переменных ($n\geqslant 3$) является уравнение

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=nx_1x_2\ldots x_n. \qquad (7)$$

Нетрудно видеть, что ряд изложенных предложений переносится на этот случай (существует сингулярное решение $x_1=1$, $x_2=1$, ..., $x_n=1$, для всякого решения существуют соседние решения и т. д.). Однако автору неизвестно, чтобы где-нибудь была изложена достаточно полная теория уравнения (7). Поиски такой теории могли бы стать основой небольшого самостоятельного исследования.

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «О простых машинах» предназначена восьмиклассникам, «Диа- и парамагнетики» — девятиклассникам, «Опыты Резерфорда и явление радиоактивности» — десятиклассникам. Материалы подготовил И. К. Белкин.

О простых машинах

Равновесие тел и работа сил. На первый взгляд кажется, что понятия «равновесие» и «работа» несовместимы друг с другом. Ведь сила совершает работу только тогда, когда она приложена к движущемуся телу; равновесие же, как будто, связано с отсутствием движения. Однако связь между равновесием тела и работой приложенных к нему сил существует. Поясним это на примере рычага.

Рычаг — одна из самых древних простых машин. Как известно, для равновесия рычага необходимо, чтобы алгебраическая сумма моментов приложенных к нему сил была равна нулю:

$$F_1 d_1 = F_2 d_2, \text{ или } \frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}. \qquad (1)$$

Здесь F_1 и F_2 — модули приложенных к рычагу сил, d_1 и d_2 — плечи этих сил (рис. 1).

Условие равновесия можно, однако, выразить и иначе. Будем считать, что точка опоры рычага O — это закрепленная ось (точнее — ее проекция на плоскость чертежа), около которой наш рычаг может поворачиваться. При повороте точки a и b приложения сил будут двигаться по дугам окружностей с центром в точке O.

Представим себе, что рычаг повернулся на некоторый малый угол α. Тогда можно считать, что точки приложения сил совершили малые перемещения $\overrightarrow{\Delta s_1}$ и $\overrightarrow{\Delta s_2}$ соответственно.

Из подобия треугольников $aa'O$ и $bb'O$ следует, что $d_2/d_1 = \Delta s_2/\Delta s_1$. Поэтому вместо равенства (1) можно написать

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\Delta s_2}{\Delta s_1}, \text{ или } F_1 \Delta s_1 = F_2 \Delta s_2. \qquad (2)$$

Величина $F_1 \Delta s_1$ — это работа силы $\vec{F}_1$ на малом перемещении $\overrightarrow{\Delta s_1}$, причем знак этой работы отрицательный, так как вектор перемещения $\overrightarrow{\Delta s_1}$ направлен противоположно вектору $\vec{F}_1$. Точно так же $F_2 \Delta s_2$ — это работа силы $\vec{F}_2$ на малом перемещении $\overrightarrow{\Delta s_2}$, но эта работа положительная. Отсюда следует, что *при равновесии рычага алгебраическая сумма работ приложенных к рычагу сил при малых перемещениях точек их приложения равна нулю.*

Реальные, и необязательно малые, движения концов рычага (точек приложения сил) происходят по дугам окружностей. Но их всегда можно мысленно разбить на малые участки, практически совпадающие с отрезками прямых. Умножив силу на проекцию каждого такого малого перемещения на направление силы, мы получим работу силы на этом перемещении. Общая работа будет равна сумме работ на всех участках:

$$F_1 s_1 = F_2 s_2, \text{ или } \frac{F_1}{F_2} = \frac{s_2}{s_1}. \qquad (3)$$

Таким образом, в основе действия рычага лежит следующее правило: *отношение приложенных сил равно*

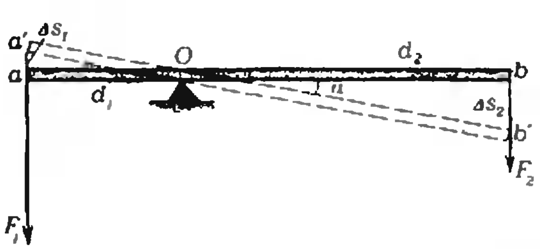


Рис. 1.

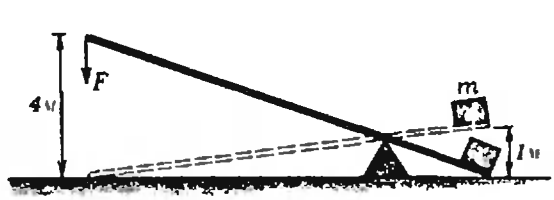


Рис. 2.

обратному отношению перемещений точек их приложения.

В нем, в этом правиле, оказывается, и заключен «секрет» действия рычага. Если, например, с помощью рычага поднимают груз (рис. 2), то положительная работа силы $\vec{F}$ (работа на «входе») равна отрицательной работе силы тяжести $m\vec{g}$ (работа на «выходе»). Но из рисунка 2 видно, что перемещение поднимаемого груза меньше перемещения того конца рычага, к которому приложена сила $\vec{F}$. Согласно формуле (3), модуль силы тяжести, приложенной к грузу, во столько же раз больше F. Отношение силы «на выходе» к силе «на входе» (по модулю) называют передаточным числом рычага (иногда его называют также механической выгодой рычага). Рычаг позволяет, как говорят, «выигрывать» в силе. Но за всякий выигрыш надо платить. И платой служит «проигрыш» в перемещении: перемещение «на входе» во столько же раз больше перемещения «на выходе», во сколько раз сила «на выходе» больше силы «на входе».

Это правило, применимое не только к рычагу, но и ко всем другим простым машинам, известно как «золотое правило механики».

Еще одна простая машина — наклонная плоскость. Формула (3) справедлива не только для рычага. Еще одним устройством, тоже называемым простой машиной, служит гладкая наклонная плоскость. Если, например, нужно поднять груз массой m на высоту h, то при равномерном движении по вертикали к грузу нужно было бы приложить силу, равную силе тяжести груза mg. Но если двигать этот груз равномерно по наклонной плоскости длиной l, то для этого достаточно силы, во столько раз меньшей mg, во сколько раз l больше h. Выигрыш в силе (передаточное число) равно, следовательно, отношению l/h. Но $l/h = 1/\sin\varphi$, так что выигрыш в силе для наклонной плоскости равен $1/\sin\varphi$, где φ — угол наклона плоскости к горизонту.

Наклонная плоскость, как и рычаг, использовалась человеком с незапамятных времен. Издавна известны также и разновидности наклонной плоскости — клин и винт. Клин представляет собой сложенные вместе основаниями две наклонные плоскости, винт — наклонную плоскость, обернутую вокруг стержня. В качестве примера винтового устройства на рисунке 3 показан домкрат. Из рисунка 3 видно, что для подъема груза на высоту h (шаг винта) конец рукоятки, к которому приложена сила, должен пройти путь, равный $2\pi R$, где R — расстояние от оси винта до конца рукоятки. Ясно, что выигрыш в силе в этом случае равен отношению $2\pi R/h$. Сила «на входе», следовательно, в $2\pi R/h$ раз меньше силы «на выходе».

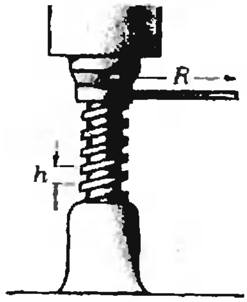


Рис. 3.

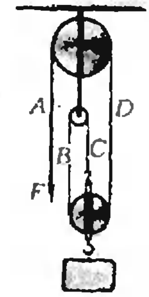


Рис. 4.

Разновидность рычага — блок. Еще один важный вид простых машин связан с блоком. Сам по себе неподвижный блок представляет собой разновидность рычага, но рычага равноплечного, никакого выигрыша в силе не дающего. Но различные системы подвижных и неподвижных блоков известны как устройства, позволяющие не хуже рычагов и наклонных плоскостей заменять большие силы на малые.

На рисунке 4 показана типичная система блоков — полиспаст. Сила F, приложенная к свободному концу каната A, передается через блоки канатам B, C и D. Каждый из них действует на груз тоже с силой F. Вместе они действуют с силой $3F$. Таким образом, сила «на выходе» втрое превосходит силу «на входе». Однако при подъеме груза, скажем на 1 метр, каждая веревка B, C и D укорачивается на 1 метр, поэтому свободный конец каната A нужно удлинить на 3 метра. Это — «плата» за выигрыш в силе.

* * *

Таким образом, основа всей «техники» простых машин — рычаги и наклонные плоскости. С древнейших времен они, их разновидности и комбинации облегчали труд человека (выигрыш в силе!). Несмотря на их почтенный возраст (тысячелетия!), они не утратили своего значения и в наши дни. Но теперь простые машины приводятся в движение не мускульной силой человека или животных, а настоящими машинами — двигателями (электрическими, тепловыми, гидравлическими и т. д.).

Диа- и парамагнетики

Как известно, индукция магнитного поля в веществе может усиливаться или ослабляться по сравнению с вакуумом. В первом случае вещество называют парамагнетиком, во втором — диамагнетиком.*) В чем же причина пара- и диамагнетизма?

Кратко природу парамагнетизма можно объяснить так. В атомах (или молекулах) электроны движутся по замкнутым траекториям (орбитам). Эти мельчайшие электрические токи, называемые молекулярными, создают магнитное поле. В отсутствие внешнего магнитного поля из-за теплового движения атомов плоскости орбит ориентированы беспорядочно, поэтому индукция собственного магнитного поля, создаваемого всеми атомами, в среднем равна нулю.

Когда же вещество помещают во внешнее магнитное поле, плоскости орбит электронов (подобно рамкам с током) частично поворачиваются, так, чтобы векторы индукции создаваемых ими полей складывались с вектором индукции внешнего поля. В результате суммарная магнитная индукция оказывается больше индукции внешнего поля.

Природа диамагнетизма более сложная. Чтобы ее понять, вспомним явление электромагнитной индукции («Физика 9», § 92, 93). При изменении магнитного потока через электрический контур в нем возникает индуцированный электрический ток. Согласно правилу Ленца, этот ток имеет такое направление, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока. В контуре, не обладающем электрическим сопротивлением, например в сверхпроводящем контуре или в «контуре», образуемом электроном, движущимся в атоме по своей орбите, индуцированный ток не затухает. Он сохраняется до тех пор, пока существует внешнее магнитное поле. Магнитное поле индуцированного тока направлено противоположно внешнему полю, так что суммарная магнитная индукция в веществе уменьшается.

В каждом веществе проявляются оба эффекта. С одной стороны, внешнее магнитное поле ориентирует орбиты электронов и вследствие этого усиливается. С другой стороны, оно изменяет скорость движения электронов по орбитам и вследствие этого, в соответствии с законами электромагнитной индукции, ослабляется.

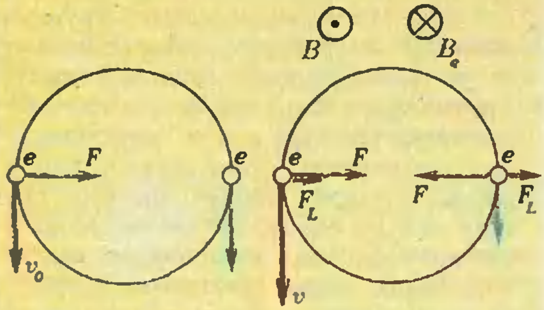
Уменьшение магнитного поля обычно очень мало́, и поэтому диамагнетизм заметно проявляется лишь в тех веществах, атомы которых собственного магнитного поля не создают (и в которых, следовательно, нет парамагнитного эффекта).

Простейший диамагнитный атом можно представить себе следующим образом: два электрона вращаются вокруг ядра по одной орбите, но в противоположных направлениях. В этом случае создаваемые электронами магнитные поля компенсируют друг друга, и поворот плоскости орбиты не приводит к усилению магнитного поля. А вот диамагнитный эффект проявляется в полной мере. Рассмотрим его подробнее.

Пусть каждый электрон в атоме в отсутствие внешнего манитного поля движется по круговой орбите радиусом R со скоростью v_0. При включении магнитного поля возникает вихревое электрическое поле, которое изменяет скорость движения электрона. Предположим, что теперь она равна v. Если считать, что вектор магнитной индукции $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости орбиты, то на электрон со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, равная по модулю $F=evB$.

Запишем второй закон Ньютона для движения электрона по орбите до и после включения магнитного по-

*) Наряду с пара- и диамагнитными веществами существуют еще ферромагнетики. О них рассказывается в школьном учебнике («Физика 9», § 90).



ля (см. рисунок):

$$\frac{mv_0^2}{R}=F, \quad \frac{mv^2}{R}=F\pm evB,$$

где F — сила электрического притяжения элетрона к ядру. Вычитая эти уравнеиия одно из другого, получаем

$$v^2-v_0^2=\pm\frac{R}{m}evB,$$

причем выбор знака «+» или «—» определяется направлением скорости электрона.

В слабом магнитном поле изменение Δv модуля скорости электрона мало́, и его можно найти приближенно, считая $v^2-v_0^2=(v+v_0)(v-v_0)\approx\approx 2v\Delta v$. В результате имеем

$$\Delta v=\pm\frac{eBR}{2m}.$$

Как видно, один электрон в нашем двухэлектронном атоме в магнитном поле начинает вращаться чуть быстрее, другой — чуть медленнее, и так, что при этом происходит ослабление внешнего поля.

Величина $\omega_L=\Delta v/R=eB/(2m)$ имеет размерность частоты. Ее называют ларморовской частотой — по имени английского физика Дж. Лармора. Хотя мы рассмотрели лишь частный случай, можно доказать общую теорему (теорему Лармора): в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ движение электрона будет таким же, как и без поля, но с добавочным вращением вокруг вектора $\vec{B}$ с частотой ω_L.

Важно, что эта теорема и выражение для ω_L остаются справедливыми и при использовании для описания движения электрона законов квантовой механики.

Опыты Резерфорда и явление радиоактивности

Опыты Резерфорда, о которых рассказывается в § 93 «Физики 10», двояко связаны с явлением радиоактивности. С одной стороны, в этих опытах для бомбардировки атомов тяжелых элементов использовались положительно заряженные быстрые альфа-частицы, испускаемые радиоактивными веществами. Радиоактивность, таким образом, дала «инструмент» для опытов. С другой стороны, результаты опытов Резерфорда, приведшие к созданию планетарной модели атома, позволили подойти к объяснению самого явления радиоактивности, до того бывшего в высшей степени загадочным.

Из опытов Резерфорда выяснилось, что атом любого элемента состоит из положительно заряженного *ядра*, размеры которого в десятки или даже сотни тысяч раз меньше размеров атома, и отрицательно заряженных электронов, образующих *электронную оболочку*. При этом оказалось, что электрический заряд ядра, если его выразить через заряд электрона, принятый за единицу, равен порядковому номеру элемента в таблице Менделеева. В символической записи ядер их заряд выражается порядковым номером, который записывается в виде нижнего индекса при символе элемента. Верхний же индекс обозначает массу ядра, выраженную в атомных единицах массы. Например, ядра атомов железа и золота символически записываются так:

$$^{56}_{26}\mathrm{Fe};\quad ^{197}_{79}\mathrm{Au}.$$

Радиоактивность — явление ядерное. В какой же части атома — ядре или электронной оболочке — происходят процессы, приводящие к испусканию радиоактивных излучений (альфа-, бета- и гамма-излучений)?

Нетрудно понять, что все дело в атомном ядре. Это видно, во-первых, из того, что один из видов излучения — альфа-излучение — это поток быстрых *положительно заряженных* частиц, а таких частиц в электронной оболочке просто нет. Правда, другой вид излучения — бета-излучение, состоящее из электронов,— в принципе мог бы исходить и из электронной оболочки. Однако, и это во-вторых, энергия бета-частиц столь велика (она достигает миллионов электронвольт), что электронная оболочка такую энергию сообщить явно не может. Известно, например, что при химических реакциях, в которых атомы участвуют своими электронными оболочками, энергия, приходящаяся на один атом, равна примерно 1 эВ. Энергия квантов видимого света, которые несомненно возникают в электронной оболочке, тоже около 1 эВ. Только энергия квантов рентгеновских лучей (они также испускаются электронной оболочкой) может достигать тысяч и даже десятков тысяч электронвольт. Миллионов же электронвольт электронная оболочка «своим» электронам сообщить не может.

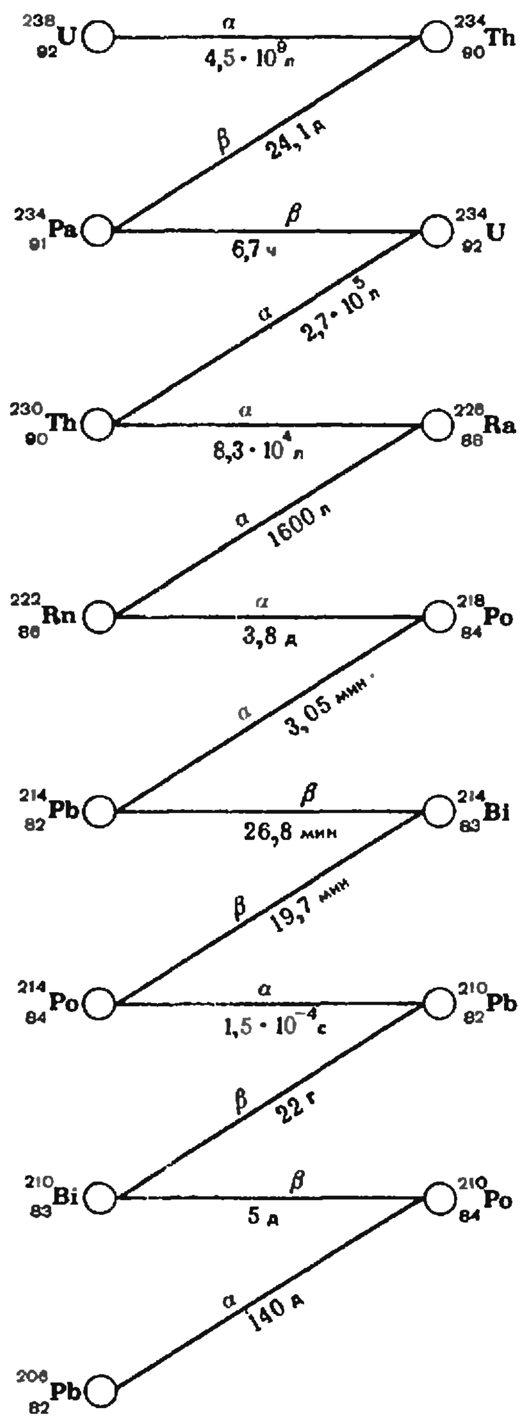
Таким образом, и альфа- и бета-частицы могут испускаться только в результате каких-то процессов в атомном ядре. То же можно сказать и о гамма-излучении.

Радиоактивные превращения. Итак, радиоактивные излучения испускаются ядрами атомов радиоактивных элементов. Заряд же ядра равен порядковому номеру элемента в таблице Менделеева. Тогда из закона сохранения электрического заряда прямо следует, что когда какое-нибудь ядро испускает заряженную частицу, заряд ядра должен измениться. А это значит, что оно *превращается* в ядро атома другого элемента, занимающего другую клетку таблицы.

Как выяснилось, альфа-частица обладает положительным электрическим зарядом, вдвое бо́льшим заряда электрона, и массой, вчетверо большей атомной единицы массы. Поэтому ядро, испустившее альфа-частицу, превращается в ядро атома элемента, у которого порядковый номер на две единицы меньше исходного, а масса меньше на четыре единицы. Если, например, радиоактивный элемент полоний с порядковым номером 84 и относительной атомной массой 218 испускает альфа-частицу, то он превращается в ядро атома элемента, занимающего клетку номер 82 таблицы (это свинец) с относительной атомной массой 214:

$$^{218}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow {}^{214}_{82}\mathrm{Pb} + \alpha.$$

Поскольку α-частица представляет собой ядро атома гелия, этот процесс



можно записать иначе:

$$^{218}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow {}^{214}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

Происходит, как говорят, *распад* ядра полония на две части — ядро свинца и ядро гелия.

Несколько иначе обстоит дело при испускании ядром бета-частицы, то есть быстрого электрона. Оно приводит не к уменьшению заряда ядра, а к его увеличению на одну единицу и, следовательно, к превращению его в ядро атома, порядковый номер которого на единицу больше исходного. Что касается массы, то она при таком превращении практически не изменяется, так как масса электрона в тысячи раз меньше массы любого ядра. С испусканием бета-частицы распадается, например, радиоактивный свинец $^{214}_{82}Pb$:

$$^{214}_{82}Pb \rightarrow {}^{214}_{83}Bi + \beta, \text{ или } {}^{214}_{82}Pb \rightarrow {}^{214}_{83}Bi + {}^{0}_{-1}e.$$

Все такие превращения происходят так, что суммы нижних и верхних индексов по обе стороны стрелки, обозначающей превращение, равны друг другу.

Радиоактивные ряды. Если радиоактивное излучение сопровождается превращением ядер атомов в другие ядра, то естественно возникает вопрос — почему же до сих пор существуют радиоактивные вещества? Если, например, радий (порядковый номер 88), испускающий альфа-частицы, превращается в элемент с номером 86, то почему он не исчез с лица Земли? Наверное, потому, что он сам есть продукт распада какого-то другого элемента, превращающегося в радий.

Раз радиоактивные элементы до сих пор существуют на Земле, значит, есть, по крайней мере, один радиоактивный элемент, который распадается настолько медленно, что за время существования Земли он не успел исчезнуть. Он-то, этот элемент, и «виноват» в том, что существуют и он сам, и тот элемент, в который он превращается (так сказать, его «сын»), и тот элемент, в который превращается этот «сын», и т. д.

Физики выяснили, что такие очень медленно распадающиеся элементы действительно существуют. Один из них — уран с порядковым номером 92 и относительной атомной массой 238. Он служит родоначальником одного из рядов (семейств) радиоактивных элементов, приведенного на рисунке. Над линиями в этом ряду, обозначающими превращения, указаны испускаемые частицы, а под ними — периоды полураспада, то есть промежутки времени, в течение которых распадается половина первоначального числа радиоактивных ядер. В результате четырнадцати последовательных распадов уран превращается в конце концов в свинец с относительной атомной массой 206. Это — стабильный (не радиоактивный) свинец, в отличие от свинца с массами 214 и 210.

Изотопы. Приведенный здесь радиоактивный ряд показывает, что существуют атомы одного и того же химического элемента с различными относительными атомными массами. Так, $^{214}_{82}Pb$, $^{210}_{82}Pb$, $^{206}_{82}Pb$ — это ядра атомов свинца, поскольку у всех трех ядер один и тот же заряд и, значит, они занимают одну и ту же клетку в таблице Менделеева. Такие атомы — с одинаковым зарядом ядра, но с разными массами — получили название изотопов. Как химические элементы они не отличимы друг от друга. Но свойства их ядер, например радиоактивные, совершенно различны.

В рассмотренном радиоактивном ряду есть не только изотопы свинца, но и урана, тория, полония, висмута. Вообще, если ядро испытывает последовательно одно альфа-превращение и два бета-превращения, то в результате непременно появляется изотоп исходного элемента.

Математика 10

Откуда взять уравнение

В статье «Многофигурная стереометрическая задача» («Квант», 1983, № 2) мы видели, что при решении геометрических (в особенности, стереометрических) задач уравнения, связывающие отдельные элементы фигур, оказывают нам неоценимую услугу. Где же искать уравнения? На первый взгляд кажется, что сколько задач — столько вариантов уравнений, но это не совсем так. Нет, например, двух одинаковых грибов, но все грибы делятся на небольшое количество видов, и опытный грибник не будет обшаривать каждый квадратный сантиметр леса: он знает, как выглядит то место, где можно ожидать тот или иной вид грибов, и будет осматривать только подходящие места, экономя тем свое время. Аналогично можно утверждать, что 99 % уравнений

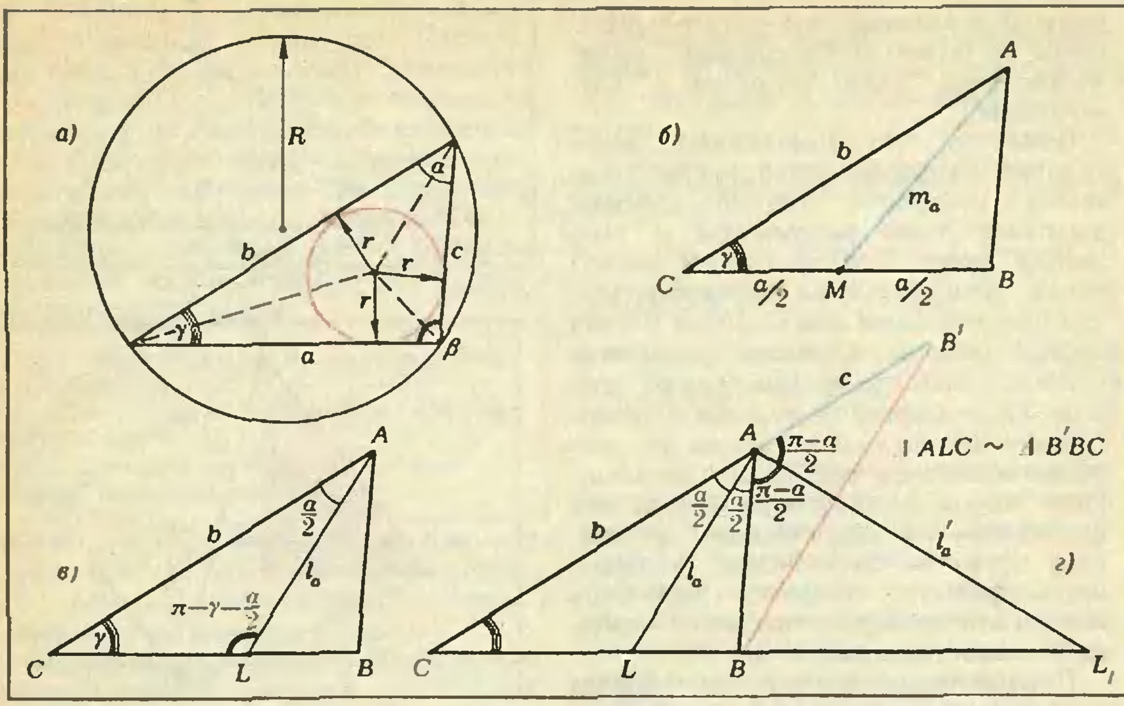


Рис. 1.

«растут» на чертеже во вполне определенных местах (оставшийся процент зависит от неисчерпаемой фантазии авторов задач), и учащийся должен знать, как выглядит фрагмент чертежа, где можно ожидать уравнение, и какие уравнения там следует искать.

Основными поставщиками уравнений служат треугольники и окружности (с хордами, касательными, секущими) и их стереометрические аналоги: тетраэдры (треугольные пирамиды) и сферы. Вспомогательными элементами служат частично правильные четырехугольники (параллелограммы, ромбы, прямоугольники, квадраты) и их стереометрические аналоги (параллелепипеды, призмы). Планиметрические фигуры более богаты на уравнения и более обозримы, поэтому всегда следует стремиться получать планиметрические фрагменты чертежа. Рассмотрим основные соотношения, поставляемые нам треугольниками, тетраэдрами, окружностями и шарами.

1. Треугольник определяется, вообще говоря, 3-мя своими элементами (не всякими). Если 3 заданных элемента полностью определяют треугольник, то через них можно выразить *все остальные* элементы, для чего полезно знать основные соотношения в треугольниках. Обозначим: a, b, c — длины сторон, α, β, γ — углы, S — площадь, r, R — радиусы вписанной и описанной окружности, h_a, m_a, l_a — высота, медиана и биссектриса, проведенные из угла α (рис. 1, *а*). Тогда можно выписать следующие соотношения:

а) $a/\sin\alpha=b/\sin\beta=c/\sin\gamma=2R$ (теорема синусов);

б) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ (теорема косинусов);

в) $S=\frac{ah_a}{2}=\frac{(a+b+c)}{2}\cdot r=$

$$=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}}$$

(формула Герона);

г) $h_a=\frac{2S}{a}=b\sin\gamma$;

д) $\frac{|BL|}{|LC|}=\frac{|BL_1|}{|L_1C|}=\frac{c}{b}$ (рис. 1, *г*);

е) $m_a^2=a^2/4+b^2-ab\cos\gamma$

(по теореме косинусов из $\triangle ACM$, рис. 1, *б*);

ж) $l_a=\dfrac{b\sin\gamma}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\gamma\right)}$

(по теореме синусов из $\triangle ACL$, рис. 1, *в*).

Соотношения а) — д) являются основными, их следует запомнить. Соотношения е) — ж) являются вспомогательными: они выражают длины медианы и биссектрисы через основные элементы треугольника путем применения теоремы синусов или косинусов к «половинке» треугольника. (Есть и более симметричные выражения для длин медианы и биссектрисы.)

Отметим, что школьники часто говорят, например, что теорема косинусов позволяет третью сторону *выразить через* первые две и угол между ними. Это не совсем верно: такая формулировка предполагает, что нам известны две стороны и угол между ними, а мы хотим вычислить третью, поэтому и применяют эту теорему в основном в этом случае. Более точно было бы сказать, что теорема косинусов *связывает значения* трех сторон и одного из углов: эта формулировка значительно расширяет сферу ее применения. А разрешить формулу теоремы косинусов можно относительно *любого* из входящих в нее значений.

Предположим, что эти соотношения мы запомнили (их всего 7). Посмотрим, как их можно применять. Пусть треугольник задан длинами сторон, а найти надо радиус вписанной окружности. В наших соотношениях мы имеем связь r с a, b, c, S ($S=r(a+b+c)/2$) и связь S с a, b, c (формула Герона), откуда, исключая S, получим:

$$r=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2(a+b+c)}.$$

Теперь пусть треугольник задан длиной одной стороны и двумя прилежащими углами, найти надо r. Если вы сразу увидели уравнение (рис. 2) $r\operatorname{ctg}(\gamma/2)+r\operatorname{ctg}(\beta/2)=a$, то это прекрасно, но если «геометрическое зрение» вам отказало, то пользуясь приведенными для предыдущего случая рассуждениями и добавив к ним соотношения а) (теорема синусов), можно получить выражения для b и c, и задача сводится к предыдущей. После страницы алгебраических преобразований получим тот же ответ (попробуйте сделать это самостоятельно). Этим еще раз подчеркивается тот факт, что геометрическая идея всегда предпочтительнее, но в крайнем случае алгебра с тригонометрией выручат, хотя и ценой дополнительной нетворческой работы.

2. Тетраэдр по существу представляет собой некоторую пространственную композицию треугольников

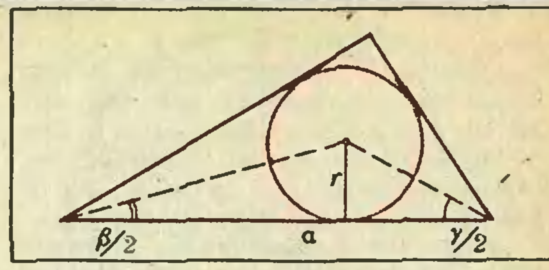


Рис. 2.

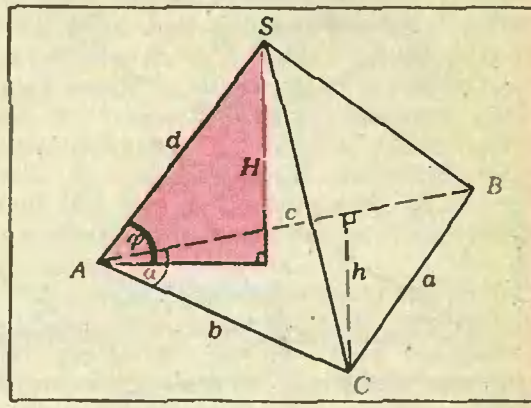


Рис. 3.

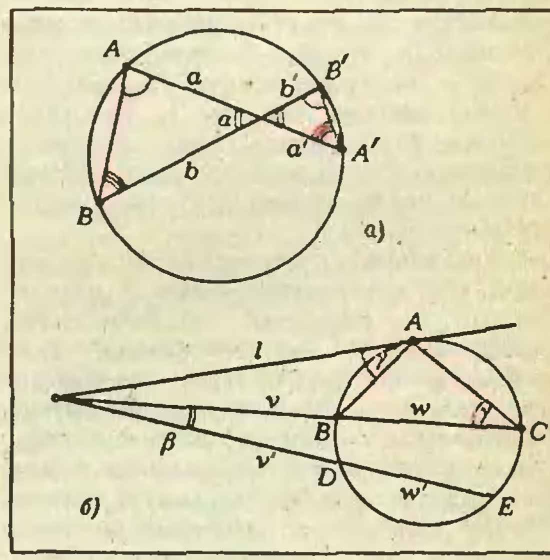


Рис. 4.

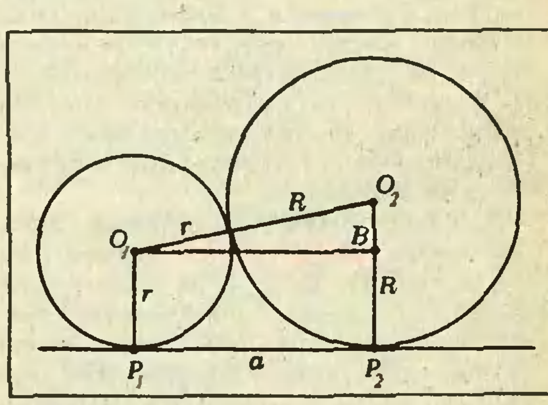


Рис. 5.

(рис. 3), поэтому ничего принципиально нового в составление уравнений не вносит. Следует только научиться связывать плоские углы трехгранного угла с двугранными и с углами наклона одного из ребер к плоскости, образованной двумя другими.

Проще всего для этого воспользоваться соотношениями для трехгранного угла $OABC$:

а) $\sin\alpha/\sin A=\sin\beta/\sin B=\sin\gamma/\sin C$ (теорема синусов);

б) $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos C$ (первая теорема косинусов);

в) $\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos\gamma$ (вторая теорема косинусов).

Здесь A, B, C — величины двугранных углов OA, OB, OC трехгранного угла, а α, β, γ — соответственно противолежащие им плоские углы*).

Единственный новый момент в пространственных фигурах — это их объем, соответственно появляются и формулы объема тетраэдра (рис. 3):

$$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H=$$
$$=\frac{1}{6}chH=\frac{1}{6}cb\sin\alpha\cdot d\sin\varphi.$$

3. Окружность (круг) и **сфера** (шар) дают множество соотношений, когда они связаны с другими окружностями и шарами или с прямыми и плоскостями. Соотношения эти абсолютно одинаковы и для окружностей и для сфер, они связывают длины отрезков или углы с дугами.

а) Расстояние между центрами равно сумме радиусов при внешнем касании и разности — при внутреннем;

б) пересекающиеся хорды: $aa'=bb'$ (рис. 4, *а*, из подобия треугольников);

в) пересекающиеся хорды: $\alpha=(\smile AB+\smile A'B')/2$ (рис. 4, *а*);

г) касательные и секущие: $v\cdot(v+w)=l^2$ (рис. 4, *б*, из подобия треугольников), откуда следует, что $v\cdot(v+w)=v'\cdot(v'+w')$ и что все касательные, проведенные из одной точки, равны;

д) касательные и секущие: $\beta=\frac{\smile CE-\smile BD}{2}$, $\gamma=\frac{\smile AB}{2}$ (рис. 4, *б*). (В соотношениях между углами и дугами знак «=» означает «измеряется».)

---

*) Доказательство этих соотношений можно найти в «Кванте», 1984, № 12, с. 25—26.

Кроме этого имеются соотношения между радиусом (диаметром) и длиной окружности, площадями и объемом:

а) длина окружности: $l=2\pi R=\pi D$, длина дуги: $l_\alpha=R\cdot\alpha$;

б) площадь круга: $S=\pi R^2=\frac{\pi}{4}D^2$, площадь сектора: $S_\alpha=R^2\cdot\frac{\alpha}{2}$;

в) площадь поверхности шара: $S_ш=4\pi R^2$;

г) объем шара: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Несколько полезных соотношений поставляет нам конус, но они легко выводятся из соотношений для окружностей и треугольников.

Теперь посмотрим, как из перечисленных выше соотношений строятся уравнения. Для их построения важную роль играют два принципа.

Принцип 1. Для получения уравнения надо один и тот же элемент выразить *двумя* способами.

Принцип 2. Для получения уравнения в треугольнике надо использовать *четыре элемента* (линейных или угловых).

Пример 1. Типичная для многих задач связка фигур (рис. 5): два касающихся круга или шара и общая касательная. Касание окружностей дает расстояние между центрами, касание с прямой дает перпендикулярность радиусов к этой прямой (радиус — часть секущей, стягивающей дугу в 180°). Треугольников здесь нет, значит, *их надо построить*. Проведя прямую O_1B, мы получаем прямоугольник и треугольник. Прямоугольник позволяет *перенести* размер a с P_1P_2 на отрезок O_1B, и размер r — на отрезок BP_2, после чего мы получаем треугольник O_1O_2B, в котором имеются 4 элемента, включающие константы и интересующие нас величины: 3 стороны и прямой угол. Любой из этих элементов, например $|O_1O_2|$, можно выразить *двумя* способами: непосредственно $(r+R)$ и по теореме Пифагора. В итоге получаем уравнение

$$(r+R)^2=a^2+(R-r)^2 \text{ или } a=2\sqrt{Rr}.$$

Рассмотрим теперь пример комплексного использования рассмотренных выше идей.

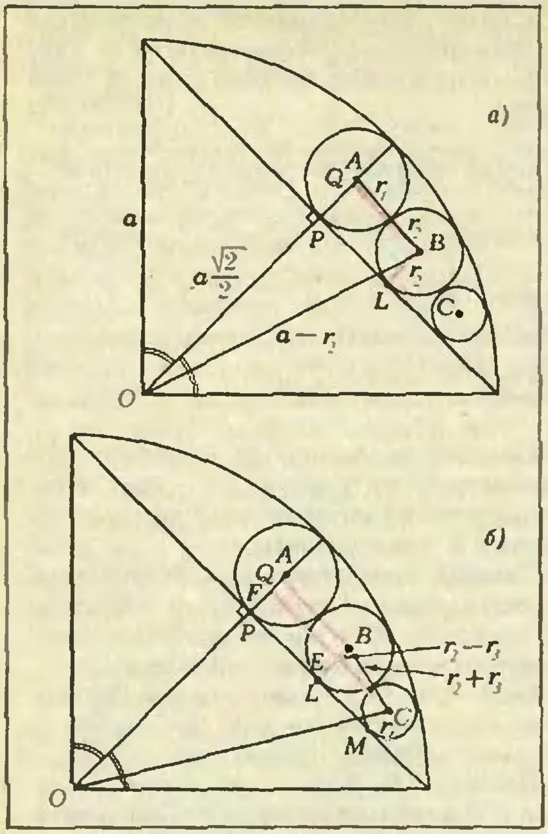


Рис. 6.

Пример 2. Имеются фигуры, показанные на рисунке 6, *а*. Надо найти радиус самой малой окружности (с центром в *C*).

Радиус r_1 определяется тривиально: $r_1=a(1-1/2)/2$. Для определения r_2 мы имеем длины отрезков *AB*, *AO* и *BO*, что недостаточно для составления уравнения. Поэтому мы *строим* 2 треугольника *QAB* и *QBO* и прямоугольник *QPLB*, проводя перпендикуляр *QB* к отрезку *AO*. Прямоугольник позволяет перенести размер r_2 на отрезок *QP*, после чего получаем картину, аналогичную примеру 1. Длина *QB* выражается двумя способами:

$$|QB|^2=(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2=$$
$$=(a-r_2)^2-(a/\sqrt{2}+r_2)^2.$$

Из уравнения можно получить r_2. Объектом для выражения двумя способами в следующей связке (рис. 6, *б*) является отрезок *FC*. Вспомогательное построение (выделено красным) дает несколько прямоугольников, позволяющих перенести размеры: отрезка *QB* — на *FE*, r_3 — на *EL* и *FP*. Отрезок *EC* определяется из треугольника *BEC*. Уравнение

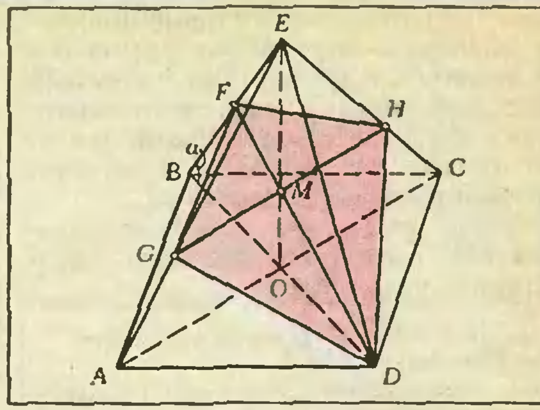


Рис. 7.

$$-(a\frac{\sqrt{2}}{2}+r_3)^2+(a-r_3)^2=$$
$$=(\sqrt{4r_1r_2}+\sqrt{4r_2r_3})^2$$

можно разрешить относительно r_3, так как значение r_2 найдено ранее.

Другие примеры планиметрических задач на составление уравнений можно найти в статье «Метрические соотношения в треугольнике», помещенной в этом номере «Кванта».

В заключение рассмотрим стереометрическую задачу.

Пример 3. Правильную четырехугольную пирамиду *EABCD* пересекает плоскость, проходящая через вершину основания перпендикулярно противоположному боковому ребру. Площадь получившегося сечения *DGFH* в два раза меньше площади основания пирамиды. Найдите отношение длины высоты пирамиды к длине бокового ребра (рис. 7).

Обозначим через *a* длину стороны квадрата, *O* — его центр, α — величину угла *EBD*. Пирамида правильная, поэтому искомое отношение $|OE|/|BE|$ равно $\sin\alpha$. По условию площадь четырехугольника *DGFH* равна $a^2/2$. Для получения уравнения выразим ее через *a* и α другим способом. Проведя диагональ сечения *FD*, мы разбиваем сечение на 2 *треугольника*, площади которых легко вычислить, так как отрезки второй диагонали *GM* и *MH* являются высотами этих треугольников (докажите самостоятельно!). Поэтому $S=\frac{1}{2}|GH|\cdot|FD|$.

Из *треугольника DFB* получаем, что $|DF|=a\sqrt{2}\sin\alpha$. Далее, можно доказать, что $GH\parallel AC$, значит, *треугольники GEH* и *AEC* подобны, откуда

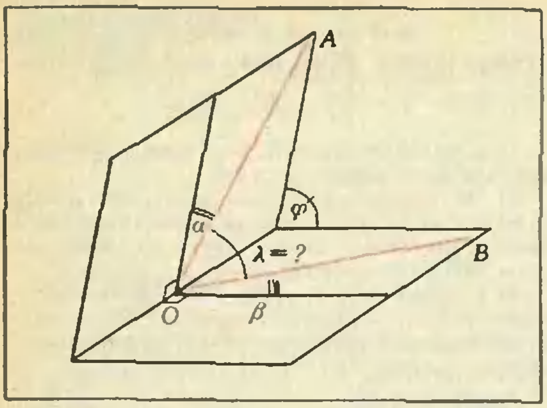


Рис. 8.

$$\frac{|GH|}{|AC|}=\frac{|EM|}{|EO|},\quad \frac{|GH|}{a\sqrt{2}}=\frac{|EO|-|MO|}{|EO|},$$

$$|GH|=\left(1-\frac{|MO|}{|EO|}\right)a\sqrt{2}.$$

Очевидно, что $|MO|=(a/\sqrt{2})\operatorname{ctg}\alpha$ и $|EO|=a/\sqrt{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha$, следовательно,

$$\frac{|MO|}{|EO|}=\frac{(a/\sqrt{2})\operatorname{ctg}\alpha}{(a/\sqrt{2})\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{ctg}^2\alpha,$$

поэтому

$$|GH|=a\sqrt{2}(1-\operatorname{ctg}^2\alpha)=\frac{a\sqrt{2}(2\sin^2\alpha-1)}{\sin^2\alpha}$$

и

$$S=\frac{a^2(2\sin^2\alpha-1)}{\sin\alpha}.$$

В итоге получаем уравнение

$$\frac{a^2(2\sin^2\alpha-1)}{\sin\alpha}=\frac{a^2}{2},$$

равносильное уравнению $4\sin^2\alpha-\sin\alpha-2=0$. Из двух корней уравнения $4x^2-x-2=0$ выбираем положительный: $x_1=(1+\sqrt{33})/8$, поскольку α — угол в треугольнике и $\sin\alpha>0$.

В этой задаче мы опять вспомогательными построениями *построили* ряд треугольников, которые позволили провести нам нужные вычисления.

Задачи

1. Убедитесь, что уравнения в задачах из *статьи в «Кванте», 1983, № 2* получены методом, полностью совпадающим с приведенной схемой.

2. Высота правильной треугольной пирамиды равна h. Точки пересечения высот каждой из боковых граней и вершина пирамиды лежат на поверхности шара радиуса r. Найдите объем пирамиды.

3. В трапеции $ABCD$ точка K — середина основания AB, M — середина основания CD. Найдите площадь трапеции, если известно, что DK — биссектриса угла D, BM — биссектриса угла B, наибольший из углов при нижнем основании AB равен 60°, *а периметр трапеции* равен 30.

4. На плоскости дан прямой угол. Окружность с центром, расположенным внутри этого угла, касается одной стороны угла, пересекает другую сторону в точках A и B и пересекает биссектрису угла в точках C и D. *Длина хорды AB равна* $\sqrt{6}$ *см, длина хорды CD* равна $\sqrt{7}$ см. Найдите радиус окружности.

5. В треугольнике ABC угол A равен α, а противолежащая ему сторона равна a. Найдите две другие стороны, если известно, что сторона a есть среднее геометрическое радиусов вписанного и описанного кругов этого треугольника.

6. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a, точка E — середина ребра AA_1. На продолжении ребра DA взята точка F так, что $|FA|=a/2$. Найдите радиус меньшей из сфер, проходящих через точки E и F и касающихся плоскостей BB_1C_1C и DD_1C_1C.

7. В правильной четырехугольной пирамиде центр вписанного шара делит высоту пирамиды в отношении $p:q$ ($p<q$). Определите угол наклона ребра к основанию.

8. Через точку O, лежащую на ребре двугранного угла величины φ, проведена прямая OA, лежащая в одной из граней угла и образующая угол α с ребром двугранного угла, и прямая OB, лежащая в другой грани и образующая с ребром угол β. Найдите угол λ между этими прямыми (рис. 8).

9. Возьмите произвольные 6 элементов, задающие (неправильный) тетраэдр и вычислите все остальные его элементы.

Л. Ф. Штернберг

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Какое из чисел больше

$$\frac{5555555553}{5555555557}\ \text{или}\ \frac{6666666664}{6666666669}\ ?$$

2 (Задача Ньютона). *Трава на всем лугу растет одинаково густо и быстро.* Известно, что 60 коров съели бы всю траву за 24 дня, а 30 коров — за 60 дней. Сколько коров съели бы всю траву за 100 дней?

3. По виду графика квадратичной функции *$y=ax^2+bx+c$ определите знаки коэффициентов* a, b и c (рис. 1).

4. Медиана и высота, проведенные из одной вершины треугольника, делят его угол на три равные части. Найдите углы треугольника.

5. а) Докажите, что угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой величины дуги, заключенной между его сторонами, и величиной дуги, заключенной между продолжениями его сторон, а угол с вершиной вне круга — полуразностью величин дуг, заключенных между его сторонами (рис. 2):

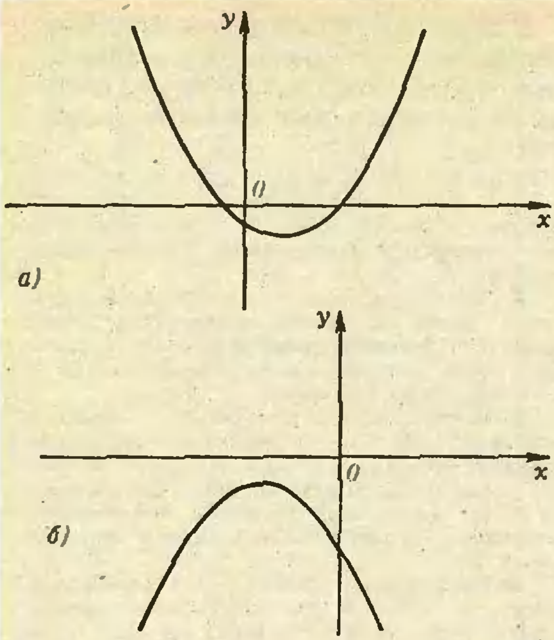


Рис. 1.

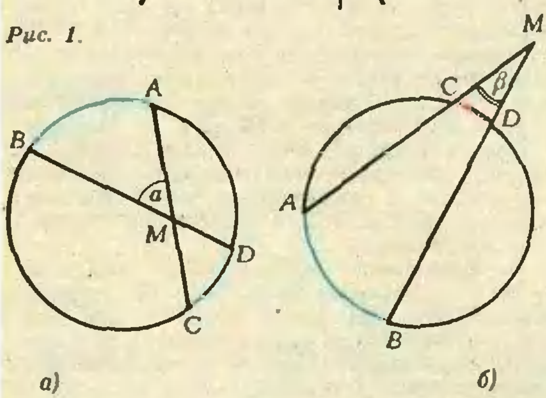


Рис. 2.

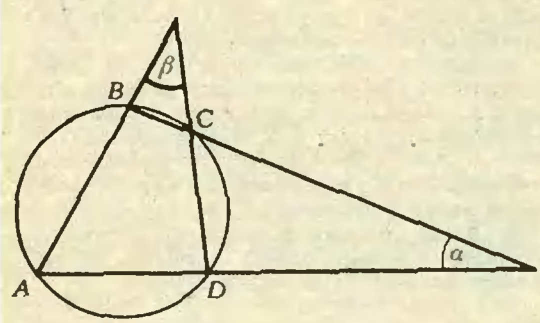


Рис. 3.

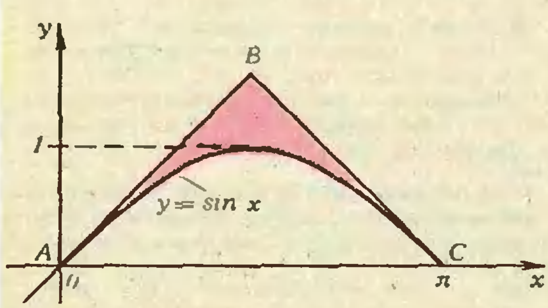


Рис. 4.

$$\alpha=\frac{1}{2}(\smile AB+\smile CD), \qquad (1)$$

$$\beta=\frac{1}{2}(\smile AB-\smile CD). \qquad (2)$$

При решении задач б) и в) можно воспользоваться формулами (1) и (2).

б) Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ известны углы α и β между продолжениями противоположных сторон (рис. 3). Найдите углы четырехугольника.

в) В треугольнике ABC точка O — центр вписанной окружности, точка A_1 — точка пересечения прямой AO с описанной окружностью. Докажите, что $|BA_1|=|OA_1|=|CA_1|$.

Девятый класс

6. Вычислите произведение

$$\left(1+\frac{1}{1\cdot 3}\right)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4}\right)\left(1+\frac{1}{3\cdot 5}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{99\cdot 101}\right).$$

7. Найдите уравнение общей касательной к параболам

$$y=x^2+4x+8 \text{ и } y=x^2+8x+4.$$

8. Ортогональной проекцией прямого угла AOB на плоскость α является снова прямой угол. Докажите, что либо (AO), либо (BO) параллельна плоскости α.

9. Найдите произведение:

а) $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$;

б) $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\ldots\cos\frac{7\pi}{15}$.

10. В трапеции $ABCD$ с длинами оснований $|AD|=a$ и $|BC|=b$ проведен отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный основаниям и делящий ее на две равновеликие трапеции. Найдите длину этого отрезка.

Десятый класс

11. Плоскость, проведенная через центр вписанного в конус шара параллельно основанию, делит этот конус на две части одинакового объема. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

12. Решите уравнения:

а) $(x^2-x+1)^2+2(x^3+1)=(x+1)^2$;

б) $\sqrt[3]{(x+1)^2}-2\sqrt[3]{x^2-1}=8\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

13. Найдите площадь, ограниченную одной «полуволной» синусоиды $y=\sin x$ и касательными, проведенными к графику синуса в точках с абсциссами 0 и π (рис. 4).

14. Известно, что $\log_7 12=a$, $\log_{12} 24=b$. Найдите $\log_{54} 168$.

15. а) Приведите пример, показывающий, что две высоты тетраэдра (или их продолжения) могут не пересекаться.

б) В тетраэдре $ABCD$ проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. Докажите, что если прямые AA_1 и BB_1 пересекаются, то и прямые CC_1 и DD_1 тоже пересекаются.

Публикацию подготовил *Б. М. Ивлев*

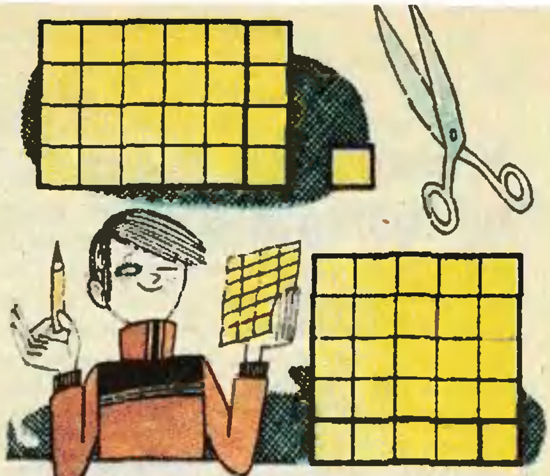
Квант для младших школьников

Задачи

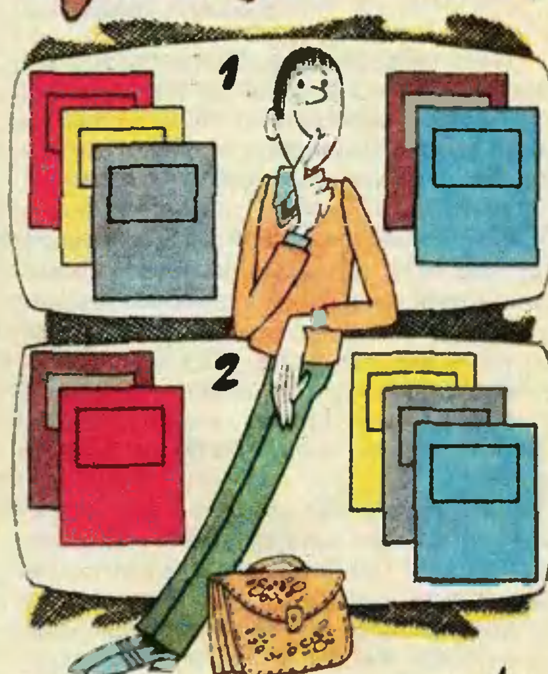
1. Существует ли трехзначное число, делящееся на 11, у которого первая цифра больше второй, а вторая — больше третьей?

2. Числа 2,75 и 8 обладают тем свойством, что произведение равно сумме составляющих их цифр: $2{,}75 \cdot 8 = 2+7+5+8 = 22$. Найдите еще хотя бы одну такую пару чисел.

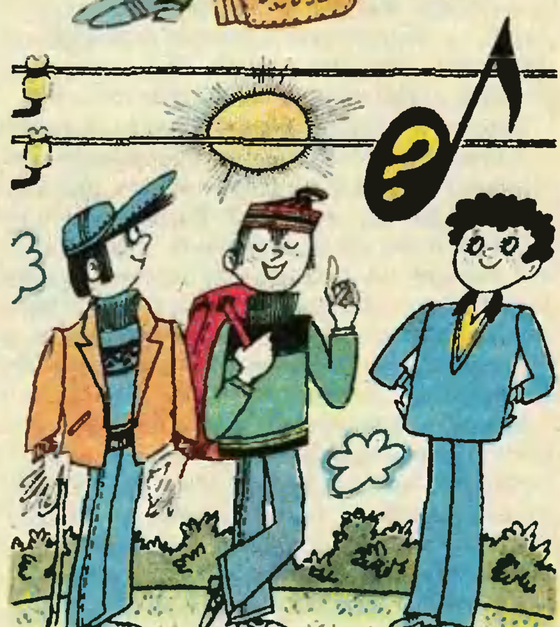
3. Нетрудно разрезать большой прямоугольник 4×6 на рисунке на две части так, чтобы из них и квадратика 1×1 можно было сложить квадрат 5×5 (см. рис.). Но попробуйте каждую из этих двух фигур разрезать на две одинаковые части так, чтобы *вновь из них* можно было сложить квадрат 5×5.



4. Пять тетрадей: синяя, желтая, серая, коричневая и красная в некотором порядке лежали в стопке. Их выложили на стол. Сначала верхнюю, потом следующую за ней и т. д. В результате получили две стопки, изображенные на рисунке 1. Затем тетради собрали в стопку в прежнем порядке, а потом вновь выложили на стол, снимая также тетради сверху стопки. На этот раз получились две стопки, изображенные на рисунке 2. В каком порядке тетради лежали в стопке?



5. Однажды я с двумя приятелями гулял за городом. Мы обратили внимание на «гудящие» телефонные провода. Я спросил у друзей, почему гудят провода. «Потому, что по ним идет разговор»,— сказал один. «Да нет, — засмеялся другой, — просто из-за того, что по ним идет ток. Ведь провода высоковольтной передачи тоже гудят». А как думаете вы?



Эти задачи нам предложили: *Д. Г. Поляк, М. В. Варга, Н. К. Антонович, В. В. Произволов, А. П. Савин.*

Может ли быть невозможное?

Доктор технических наук
Л. И. ТУЧИНСКИЙ

«Осознай то, что уже знаешь», и ты научишься летать.»
Ричард Бах. Чайка по имени Джонатан Ливингстон

Ответ на вопрос, поставленный в заголовке, может быть, по-моему, только один: конечно, может. Собственно говоря, мы привыкли к тому, что на наших глазах совершаются невозможные вещи, и даже не удивляемся им. Мы считаем само собой разумеющимся, что с аэродромов взлетают самолеты, что в космосе работают люди, что сто́ит нажать на кнопку телевизора — и моментально увидишь происходящее за тысячи километров, что существуют машины, умеющие считать и играть в шахматы, и многое другое.

А ведь если бы сто лет назад спросить у любого просвещенного человека, может ли человек полететь на Луну или увидеть, что происходит в другом городе, он бы удивленно посмотрел на вас и, наверное, усомнился в здравости вашего рассудка. Действительно, тогда это было невозможно, а сейчас это обыденно.

Все это я говорю к тому, что никогда не следует категорически утверждать: это невозможно, этого не может быть. А, собственно, почему? Только потому, что этого не может быть никогда? И, главное, не думайте, что невозможное может сделать кто-то другой, но только не вы. «Может тот, кто думает, что может» — гласит латинская пословица.

Давайте для примера решим вместе одну задачу из разряда «невозможных». Эта задача из области материаловедения. Есть такая наука, которая занимается разработкой материалов, изучением их структуры и свойств.

Мы редко задумываемся о том, что без новых материалов не было бы полетов в космос, телевидения, лазеров, сверхпроводников, самолетов, машин... Когда в космос поднимается очередной аппарат, мы в первую очередь думаем о героизме космонавтов, о блистательной работе конструкторов и не подозреваем, сколько материаловедческих вопросов пришлось решить, чтобы этот запуск стал возможным. И так во многих делах. Труд материаловедов обычно остается в тени, но это вовсе не означает, что он менее важен или менее интересен, чем труд других специалистов. Большинство же материаловедческих проблем сводится к решению физических задач. И вот одна из них, поставленная жизнью.

Требуется создать материал, способный работать при температуре, превышающей температуру его плавления. Что значит работать? Это значит, что детали (например, со́пла ракеты), изготовленные из этого материала, должны иметь достаточную жесткость и прочность, чтобы выдерживать силы, действующие на них, практически не изменяя своей формы и размеров.

На первый взгляд задача абсурдна. Что значит — материал должен работать при температуре более высокой, чем его температура плавления? Что он должен нести нагрузку, находясь в жидком состоянии, или, как любят выражаться материаловеды, в жидкой фазе? Но жидкость не только нагрузки не может нести, она и формы не держит. Если нагреть деталь выше температуры плавления материала, из которого она изготовлена, она расползется, станет бесформенной, и от нее останутся одни воспоминания. Все это так, и все-таки...

И все-таки задачу решить можно, и ваших знаний по физике вполне достаточно для этого. Но сначала несколько слов в качестве информации к размышлению.

Один из самых перспективных путей развития материаловедения — создание композиционных материалов, или композитов. Они включают в себя два или более материала и приобретают в результате такого объединения новые свойства. Типичный пример композита — железобетон (бетон, армированный металлическими прутьями), в котором объединяются свойства бетона и стали. Или материал, полученный из порошков меди и графита, обладающий наряду с хорошей электропроводностью малым трением, что позволяет использовать его для скользящих контактов. Сегодня создано множество самых разнообразных композитов, их число с каждым годом растет, и это позволяет успешно справляться с решением проблем, ранее считавшихся неразрешимыми. Поэтому при анализе конкретных задач всегда полезно продумать вариант с применением композитов. Вот, пожалуй, и вся необходимая нам материаловедческая информация.

Что? У вас мелькнула мысль? Вы считаете, что если сделать композит из двух компонентов, один из которых легкоплавкий, а другой — тугоплавкий, то такой материал сможет работать при температуре более высокой, чем температура плавления легкоплавкого компонента? Но не выше же температуры плавления тугоплавкого компонента!

Должен вас огорчить. Я имел в виду работу материала именно при температурах бо́льших, чем температура плавления самого тугоплавкого компонента. Ну, не готовы ли вы заявить, что это из области фантастики?

Нет, это вполне реально. Такие материалы существуют, они успешно применяются в новой технике.

Что же это за материалы? Их называют псевдосплавами. Сегодня в космической технике широко используются псевдосплавы вольфрам — медь, вольфрам — серебро, молибден — медь и другие. Прежде чем рассказать, как они устроены и работают, давайте вспомним кое-что из школьной физики.

При изучении агрегатных состояний вещества вы узнали, что процесс плавления чистых кристаллических веществ происходит при постоянной (для данного давления) температуре $T_{пл}$, называемой температурой плавления. Плавление твердого тела может происходить, только если к нему непрерывно подводить тепло. Количество теплоты, которое необходимо подвести для плавления к единице массы твердого тела при постоянной температуре $T_{пл}$, называется удельной теплотой плавления λ. Подобным образом происходит кипение жидкости. Температура жидкости и сосуда, в котором она кипит, не повышается, однако все время жидкость превращается в пар. Количество теплоты L, необходимое для превращения единицы массы жидкости в пар при температуре кипения $T_{кип}$, называется удельной теплотой испарения, или парообразования.

Почему в процессе плавления и кипения температура не повышается? Потому что подводимое извне тепло тратится на увеличение внутренней энергии кристаллов (при плавлении) и жидкости (при кипении). Внутренняя энергия жидкости больше внутренней энергии кристалла, а внутренняя энергия пара больше внутренней энергии жидкости.

Когда не существовало холодильников, люди в жару хранили воду в пористых сосудах. Вода медленно просачивалась сквозь поры, испарялась с наружных стенок, охлаждая стенки сосуда и его содержимое...

Внимание! Вот он, ключ к решению задачи. «Осознай то, что уже знаешь...» Ведь это же нам давно известно: плавящиеся твердые тела и испаряющиеся жидкости отбирают тепло у соприкасающихся с ними тел. Этот эффект и лежит в основе работы псевдосплавов, используемых при высоких температурах.

Представьте себе, что нам нужно изготовить сопло ракетного двигателя. Температура газов, образующихся при сгорании твердого топлива и истекающих из сопла, достигает 4000 °С. Это выше, чем температура плавления самого тугоплавкого металла — вольфрама (3380 °С). Что же сделать, чтобы сопло из вольфрама могло надежно работать при таких температурах?

Давайте поступим так. Изготовим сопло не из сплошного, монолитного, а из пористого вольфрама. Это можно сделать методами порошковой металлургии, когда вольфрамовый порошок прессуют и спекают. В результате таких операций получают вольфрам в виде пористой губки. Изменяя режимы прессования и спекания, можно регулировать количество и размеры пор. Далее этот пористый вольфрам надо пропитать легкоплавким металлом — медью или серебром. То, что получится, и будет псевдосплав вольфрам — медь или вольфрам — серебро.

(Окончание см. на с. 34)

Задачи и задачки

1. Когда расходуется больше энергии — при запуске спутника вдоль меридиана или вдоль экватора?

2. Лыжник скатывается с горки (не отталкиваясь палками) до полной остановки. Вернуться к месту старта он может двумя способами: в кресле канатного подъемника или же стоя на лыжах и пользуясь подъемником как буксиром. Каково соотношение между затратами энергии на подъем лыжника в двух случаях? Трение в блоках подъемника отсутствует.

3. Гитару вынесли на мороз. Ее струны натянулись сильнее, значит, увеличилась их упругая энергия. За счет чего произошло это увеличение?

4. Одну и ту же порцию горючего сжигают в примусе на уровне моря и в Гималаях, на высоте 8000 метров. Когда выделится больше энергии?

5. Что вносит больший вклад в энергию вылетающей стрелы — корпус лука или тетива?

$$П = mgh$$

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

$$П = k\frac{x^2}{2}$$

$$E = K + П$$

$$E = W_э + W_м$$

$$E = mc^2$$

$$W_э = \frac{CU^2}{2}$$

$$E = h\nu$$

$$W_м = \frac{LJ^2}{2}$$

$$\bar{E} = \frac{3}{2}kT$$

Заключается ли наш труд в создании науки путем связывания воедино уже известных фактов или в поисках объяснений непонятных явлений путем постановки ряда опытов — принцип сохранения энергии остается надежным руководителем.

Дж. К. Максвелл

А так ли уж хорошо знакомо вам понятие

ЭНЕРГИЯ ?

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Некоторые выпуски нашего «Калейдоскопа» мы хотим посвятить обсуждению основных физических понятий. Каких именно — решать и вам, школьникам. Ждем ваших предложений, а пока первой темой выбираем энергию.

Так иллюстрируется закон сохранения энергии в книге Дж. Орира «Популярная физика» (рисунок вверху).

8. Если охлаждать чугунную сферу, полностью залитую водой и закупоренную, ниже 0 °C, вода разорвет ее. Где источник энергии, необходимой для разрыва?

9. Перед тем как взлететь, ночная бабочка довольно долго подрагивает крылышками. Зачем?

10. Колебания стрелки магнитоэлектрического прибора быстро затухают, если его клеммы замкнуты. Куда девается энергия колебаний?

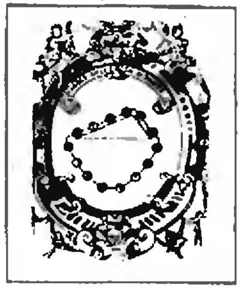
11. Маленький железный предмет «подпрыгивает», если к нему поднести сверху магнит. Сколько

Задачи и задачки

поднимаются вверх стратостаты и шары-зонды?

7. Звук, издаваемый камертоном, слаб. Однако камертон, закрепленный на резонаторе, звучит несравненно громче. Откуда же берется «лишняя» энергия?

Задачи и задачки



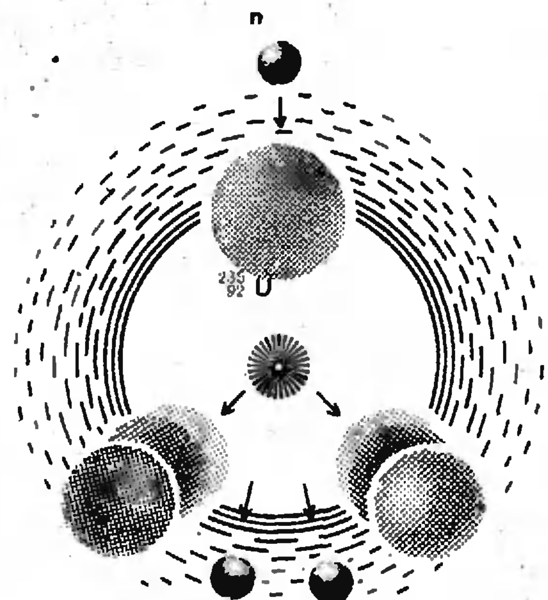
Любопытно, что

...первый до сих пор известный достоверный документ об «осуществлении» идеи вечного двигателя относится еще к XII веку, а в 1910 году в одно из московских научных учреждений был представлен на «рассмотрение» «проект» вечного двигателя, буквально повторяющий идею шестивековой давности.

...если энергию, производимую при разговоре 100 000 человек, превращать без потерь в электрическую, то ее едва хватит для того, чтобы поддерживать горение лампочки карманного фонарика.

История развития этого понятия и практического применения различных видов энергии тесно переплетена с историей всей физики и с биографиями выдающихся ученых. (Кстати, узнаете ли вы их на портретах?) Чтобы перекинуть «энергетический» мостик между самыми различными явлениями, потребовались многолетние усилия мысли и кропотливые эксперименты. Венчало их установление одного из фундаментальнейших законов природы — закона сохранения энергии.

Предлагаем вам еще раз поразмышлять над этим важным понятием, укрепить знакомство с ним и попробовать свои силы в решении нескольких задач. Как вы сразу заметите, главное в них — умело обращаться с энергией.



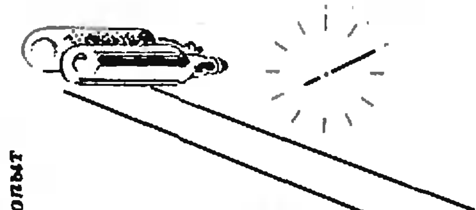
Квант 4/85

Зада

бы мы ни проводили этот опыт, «сила» магнита не ослабевает и он вновь и вновь совершает работу. Не противоречит ли это закону сохранения энергии?

Микроопыт

Заполните одну бутылку водой, а другую такую же — песком. Дайте им скатиться с наклонной



плоскости без проскальзывания. Какая из бутылок скатится быстрее? Почему?

Что читать об энергии в «Кванте»

«Законы сохранения при ядерных превращениях» — 1982, № 7;

«Энергия и громкость звука» — 1983, № 12;

«Работа, энергия и архимедова сила» — 1984, № 3;

«Механическая работа и механическая энергия» (будет опубликована в № 5 за 1985 г.).

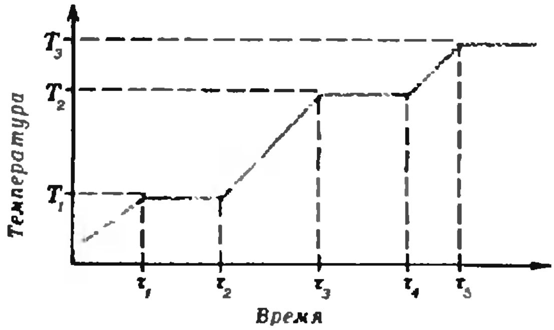
ЭНЕРГИЯ

(Начало см. на с. 30)

Почему он называется псевдосплавом? Потому что это не настоящий сплав, у которого кристаллическая решетка состоит из разнородных атомов. Здесь перемешивания компонентов на атомном уровне не происходит. Вольфрам с медью или серебром не растворяются друг в друге, их невозможно сплавить, можно только механически смешать. В данном случае мы получили псевдосплав со структурой, представляющей собой вольфрамовый каркас, поры которого заполнены медью (серебром).

Что же будет происходить с таким материалом при нагревании? Приближенная картина, например, в псевдосплаве вольфрам — медь, будет такой. Вначале температура композита станет расти (см. рисунок) до тех пор, пока не достигнет температуры плавления меди (T_1=1083 °С). Подвод тепла к псевдосплаву не вызовет повышения его температуры в течение времени, определяемого интервалом (τ_1, τ_2).

После того как вся медь расплавится, температура псевдосплава вновь начнет повышаться. Но при температуре кипения меди T_2=2595 °С вновь произойдет остановка, и пока вся медь не испарится, температура псевдосплава не повысится (интервал времени (τ_3, τ_4)). Температура газов, образующихся при сгорании топлива, может превышать температуру плавления вольфрама, но он плавиться не будет, потому что у него отнимает тепло кипящая медь, температура кото-

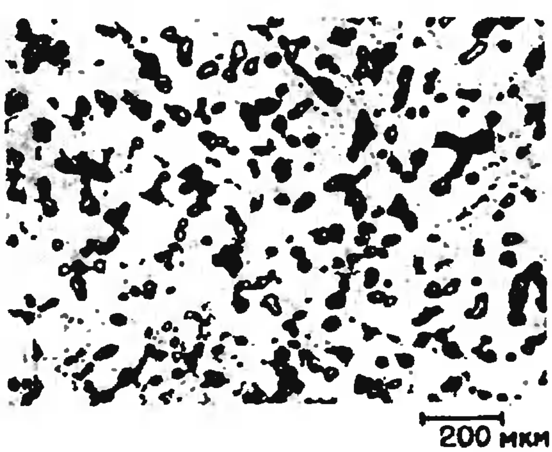


рой ниже температуры плавления вольфрама.

Конечно, сколь угодно долго такое положение сохраняться не будет. После того как вся расплавленная медь перейдет в пар, температура псевдосплава вновь начнет повышаться, и, когда она достигнет значения T_3, равного температуре плавления вольфрама (3380 °С), материал расплавится. Собственно говоря, расплавится не псевдосплав (его уже фактически не будет), а вольфрамовый каркас, который без меди работать при такой температуре не может. Вольфрам оказывается сильным до тех пор, пока есть у него пусть более слабый, но верный друг — медь, способная принести себя в жертву, испариться до последнего атома, чтобы облегчить судьбу своего друга.

Однако для дружбы между материалами, как и между людьми, нужна совместимость. Например, в высокотемпературных псевдосплавах хорошими друзьями вольфраму оказываются медь или серебро, но плохими — никель или железо. Дело в том, что медь и серебро отдают себя в жертву, не причиняя вольфраму вреда, а никель и железо не согласны погибать в одиночку. С повышением температуры они начинают интенсивно разъедать вольфрам. От этого резко падает прочность каркаса, он становится неработоспособным. Друзей нужно уметь выбирать.

Теперь давайте прикинем, что эффективнее отнимает тепло у материала — плавление или испарение. Очевидно, тот процесс, который требует бóльших затрат тепла для протекания. Найдем в справочнике, чему равны удельная теплота плавления и испарения. Для подавляющего большинства материалов затраты на испарение 1 грамма вещества оказываются во много раз больше, чем на плавление. Например, для воды λ=335 Дж/г,



Фотография типичной микроструктуры псевдосплава. На сером фоне вольфрамового каркаса видны медные включения неправильной формы.

а $L=2260$ Дж/г, для меди $\lambda=$ $=176$ Дж/г, а $L=5240$ Дж/г. Таким образом, основную работу по спасению вольфрама от расплавления медь выполняет при своем испарении. Оно должно идти все время, пока материал находится в зоне мощных тепловых потоков.

Обычно в ракетах требуется, чтобы материал «продержался» в пределах нескольких минут, а этот ресурс сопла из псевдосплава вполне могут осилить. Возможны различные варианты деталей, позволяющие увеличить срок их службы. Например, можно представить себе соединенный с псевдосплавом резервуар с расплавленной медью — из него происходит подпитка медью, компенсирующая ее испарение из материала. Это, правда, уже технические детали, которые очень важны, но к принципиальному решению задачи отношения не имеют.

На самом деле в псевдосплавах происходят более сложные процессы, чем те, что я обрисовал. Материал неравномерно прогревается по толщине, в нем могут возникать большие термические напряжения, способные иногда вызвать появление трещин. Интенсивность испарения будет зависеть от размера и структуры пор, химической чистоты компонентов и ряда других факторов. Но это тоже частности. Важно, что мы нашли принципиальный путь решения задачи. Мы заставили материал работать в среде, температура которой выше температуры его плавления.

Оказывается, и невозможное возможно.

Наша обложка

Ложка и ... фонтан

Посмотрите на фотографии, представленные на первой странице обложки и здесь на рисунке. Такие фонтаны каждый из вас может легко воспроизвести у себя дома.

Для этого не очень сильную струю воды (например, из водопроводного крана) аккуратно направьте на ложку (отрегулируйте напор воды так, чтобы не забрызгать себя и окружающих). Отразившись от ложки, струя и образует фонтан.

Обратите внимание на одну особенность наших фонтанов.

Как известно, тело, брошенное под углом к горизонту, летит по параболе. Поэтому струи обычных фонтанов, городских и дворцовых, также образуют параболы. Однако в нашем случае это явно не так — траектории, по которым двигаются капли воды, более сильно, чем параболы, изогнуты в направлении вертикальной оси системы. Более того, возможно так подобрать условия опыта, что в некотором месте траектории становятся вертикальными, а затем как бы прижимаются к оси системы.

Объяснить это можно, учитывая явление поверхностного натяжения в жидкости. Если сделать мысленный горизонтальный разрез нашего фонтана (в непосредственной близости к ложке), то в сечении вода будет представлять собой кольцо. Это кольцо оказывается как будто бы зажатым между двумя поверхностными пленками, которые действуют на отдельные участки кольца с силами, направленными к центру. Вот эти-то силы и приводят к более существенному искривлению траекторий частиц воды, чем при их свободном движении.

Естественно напрашивается вопрос — сказывается ли поверхностное натяжение в случае обычных фонтанов? Оказывается, да, только гораздо менее заметно. А вот почему это так — попробуйте объяснить сами.

А. А. Лапидес

задачник Кванта

Задачи

М916 — М920; Ф928 — Ф932

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 июня 1985 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4—85» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М916, М917» или «Ф928». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М916. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади треугольника.

А. А. Азамов

М917. а) Чему равна длина максимальной серии идущих подряд несчастливых билетов? б) Сколько существует таких серий максимальной длины? (Считается, что номера билетов изменяются от 000000 до 999999 включительно; билет называется счастливым, если сумма первых трех цифр его номера равна сумме трех последних цифр.)

С. Ю. Оревков

М918*. Радиус вписанной окружности треугольника равен 1, а длины его сторон — целые числа. Докажите, что эти числа — 3, 4 и 5.

В. В. Прасолов

М919. а) Докажите равенство

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\, dx + \int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

б)* Докажите неравенство

$$9 < \int_0^3 \sqrt[4]{x^4+1}\, dx + \int_1^3 \sqrt[4]{x^4-1}\, dx < 9{,}0001.$$

Ю. И. Ионин

М920. а) Найдите хотя бы одно решение уравнения

$$x^3+y^3+z^3 = x^2y^2z^2$$

в натуральных числах.

б)* Докажите, что уравнение

$$x^3+y^3+z^3 = nx^2y^2z^2$$

имеет натуральное решение лишь при $n=1$ и $n=3$ и найдите все эти решения.

Р. А. Мазов

Ф928. Два одинаковых гладких полуцилиндра, общая масса которых m, подвешены на нерастяжимой невесомой нити так, как показано на рисунке 1. Чему равны сила натяжения нити и сила давления одного полуцилиндра на другой?

Л. Г. Маркович

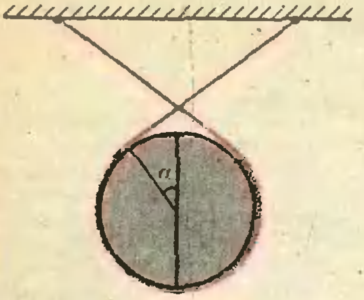


Рис. 1.

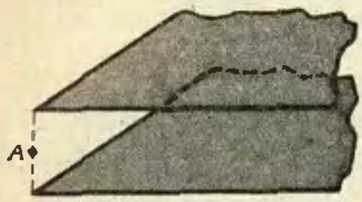


Рис. 2.

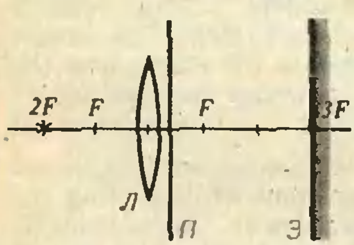


Рис. 3.

Ф929. Известно, что охлаждая сосуд с водой и одновременно откачивая газ из сосуда, можно довести воду до кипения. Возможно ли закипание жидкости при охлаждении замкнутого сосуда с жидкостью и газом?

Л. А. Ашкинази

Ф930. Плотности поверхностного заряда на прямоугольных пластинах плоского конденсатора равны $+\sigma$ и $-\sigma$. Расстояние между пластинами много меньше размера пластин. Определите напряженность электрического поля в точке A (см. рисунок 2).

О. Я. Савченко

Ф931. Точечный источник расположен на расстоянии $2F$ от линзы с фокусным расстоянием F. На расстоянии $3F$ от линзы расположен экран (рис. 3). За линзой установлена круглая пластинка радиуса R, пропускающая свет неравномерно (радиус пластинки не меньше радиуса линзы). При этом пятно, получающееся на экране, имеет равномерную максимально возможную освещенность. Как распределена «пропускная способность» пластинки вдоль ее радиуса?

А. А. Лапидес

Ф932. Настройка гитары состоит в следующем: зажимая в определенном месте вторую струну, добиваются, чтобы она звучала в унисон с первой, далее так же настраивают другие струны. Может ли человек, у которого абсолютно отсутствует музыкальный слух (то есть умение различать звуки по высоте), настроить гитару?

И. И. Мазин

Problems

M916—M920; P928—P932

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than June 15th to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solu-

M916. Perpendiculars are drawn from the three midpoints of the sides of an acute triangle to the two other sides. Prove that the area of the hexagon thus obtained is half of that of the triangle.

A. A. Azamov

M917. a) What is the length of the longest possible series of unlucky ticket numbers? b) How many such longest series are there? (It is assumed that the ticket numbers range from 000000 to 999999 inclusively; a ticket number is called lucky if the sum of its first three digits equals that of the last three.)

S. Yu. Orevkov

M918*. The radius of a triangle's incircle is 1, the lengths of its sides are integers. Prove that these integers are 3, 4 and 5.

V. V. Prasolov

tions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: «KVANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the calendar year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

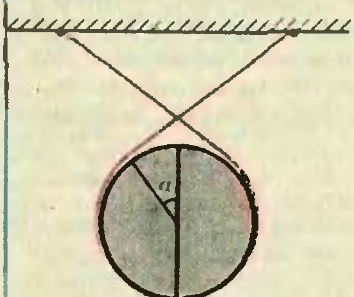


Fig. 1.

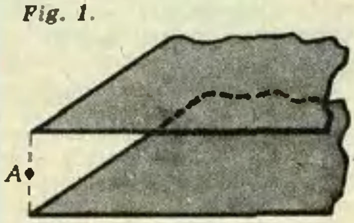


Fig. 2.

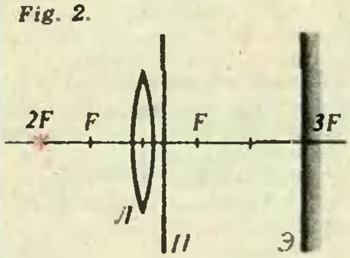


Fig. 3.

M919. a) Prove the relation

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx + \int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

b)* Prove the inequality

$$9 < \int_0^3 \sqrt[4]{x^4+1}\,dx + \int_1^3 \sqrt[4]{x^4-1}\,dx < 9{,}0001$$

Yu. I. Ionin

M920. a) Find at least one solution of the equation

$$x^3+y^3+z^3=x^2y^2z^2$$

in natural numbers.

b)* Prove that the equation

$$x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2$$

has natural solutions only when $n=1$ and $n=3$ and find all these solutions.

R. A. Mazov

P928. Two identical half cylinders of total mass m hang on an inelastic weightless string as shown on Fig. 1. What is the tension in the string and the force exerted by one half cylinder on the other?

L. G. Markovich

P929. It is known that water contained in a vessel can be brought to the boiling point while cooling the vessel and pumping out gas from it. Can boiling be acheived in cooling a closed vessel containing liquid and gas?

L. A. Ashkinazi

P930. The densities of charge on the rectangular plates of a flat capacitor are $+\sigma$ and $-\sigma$. The distance between the plates is much less than their size. Determine the tension of the electric field at the point A (see Fig. 2).

O. Ya. Savchenko

P931. A point source is located at the distance $2F$ from a lens Л of focal distance F. A non-uniformely transluscent round plate П of radius no less than that of the lens is placed behind the latter. A screen Э is placed at the distance $3F$ from the lens (Fig. 3). The spot obtained on the screen has the largest possible luminosity. How is the "transparency" of the plate distributed along its radius?

A. A. Lapides

P932. A guitar is tuned as follows: the second string is pressed in a definite spot and stretched until it sounds in unison with the first one, then the following strings are tuned in a similar way. Can a person who has no ear for music (i. e. is incapable of distinguishing a higher note from a lower one) tune a guitar?

I. I. Mazin

Решения задач

М896 — М900; Ф908 — Ф912

М896. *Про выпуклый четырехугольник $ABCD$ известно, что окружность с диаметром AB касается прямой CD. Докажите, что окружность с диаметром CD касается прямой AB тогда и только тогда, когда прямые BC и AD параллельны.*

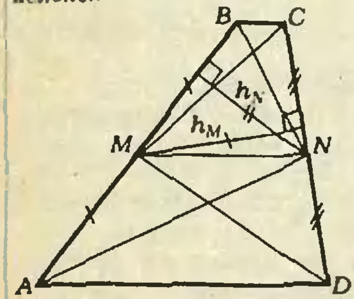


Рис. 1.

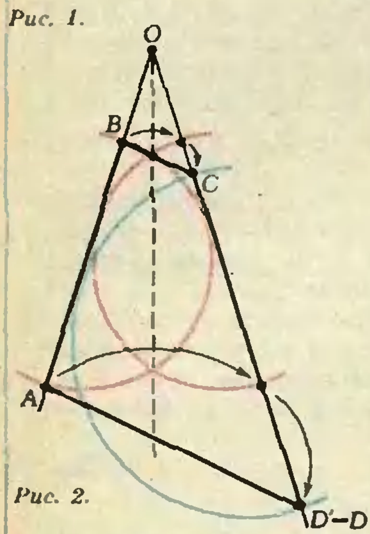


Рис. 2.

Первое решение. Пусть M и N — середины сторон AB и CD, h_M и h_N — расстояния от точек M и N до прямых CD и AB, a и b — длины сторон AB и CD (рис. 1). Очевидно, прямые BC и AD параллельны тогда и только тогда, когда каждая из них параллельна средней линии MN четырехугольника, то есть когда $S_{MNB}=S_{MNC}$ и $S_{MNA}=S_{MND}$. (Буквой S, как обычно, обозначены площади соответствующих треугольников.) А поскольку $S_{MNA}=$ $=S_{MNB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{AB}{2}\cdot h_N=\frac{ah_N}{4}$ и, аналогично, $S_{MNC}=$ $=S_{MND}=\frac{bh_M}{4}=\frac{ab}{8}$ (по условию $h_M=a/2$), прямые BC и AD параллельны тогда и только тогда, когда $h_N=b/2$, то есть когда окружность с диаметром CD касается AB.

Второе решение. Допустим сначала, что прямые AB и CD пересекаются в точке O (рис. 2). Выполним последовательно симметрию относительно биссектрисы угла AOD и гомотетию с центром O и коэффициентом OC/OB (так, чтобы точка B перешла в C). При этом точка A перейдет в некоторую точку D' на луче OD, а окружность с диаметром AB — в окружность с диаметром CD', которая, очевидно, касается прямой AB. Прямые BC и AD' параллельны, так как $OC:OB=OD':OA$. Поэтому для завершения доказательства остается заметить, что окружность с диаметром CD касается прямой AB тогда и только тогда, когда $D=D'$.

Случай $AB\parallel CD$ рассматривается аналогично: надо только за ось симметрии взять прямую, равноудаленную от AB и CD, а гомотетию заменить параллельным переносом.

Н. Б. Васильев, В. Н. Дубровский

М897. *Найдите хотя бы одну пару целых чисел (x, y) такую, что число*

$$(x+y)^7-x^7-y^7$$

делится на 7^7, а число $(x+y)xy$ не делится на 7.

◆

Ответ: одна из искомых пар — $x=1$, $y=18$.

Преобразуем данное выражение:

$$(x+y)^7-x^7-y^7=$$
$$=7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7xy^6=$$
$$=7xy\,(x^5+3x^4y+5x^3y^2+5x^2y^3+3xy^4+y^5)=$$
$$=7xy\,(x+y)(x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4)=$$
$$=7xy\,(x+y)(x^2+xy+y^2)^2.$$

Для того чтобы это выражение делилось на 7^7, необходимо, чтобы x^2+xy+y^2 делилось на 7^3 (по условию $xy\,(x+y)$ не делится на 7). Положим $x=1$ и попробуем найти такое y, чтобы $1+y+y^2=$ $=7^3=343$. Это квадратное уравнение имеет корни $y_1=18$ и $y_2=-19$, таким образом, одно из решений задачи — (1; 18).

Можно показать, что все пары целых чисел (x, y), для которых x^2+xy+y^2 делится на 7^3 (то есть решения нашей задачи), описываются формулами: $(343n+k,\ 343m+18k)$, $(343n+18k,$

$343m+k)$, $(343n-19k$, $343m+k)$, $(343n+k$, $343m-19k)$, где n, k, m — произвольные целые числа.

А. П. Савин

◆

М898*. *Для нечетных натуральных чисел $a<b<c<d$ выполнены условия: $ad=bc$, $a+d=2^k$ и $b+c=2^m$, где k и m — некоторые натуральные числа. Докажите, что*
а) $a=1$;
б) для каждого $m\geqslant 3$ существует, причем только один, набор чисел a, b, c, d, k, удовлетворяющий этим условиям.

а) Установим сначала, что $k>m$. Используя данные соотношения, получим:

$$2^k-2^m=a+d-(b+c)=$$
$$=a-b+d-\frac{ad}{b}=\frac{d}{b}(b-a)-(b-a)=$$
$$=(b-a)\left(\frac{d}{b}-1\right)>0$$

(поскольку $b>a$, $d>b$), следовательно, $k>m$.

Докажем теперь, что $a+b=2^{m-1}$. Равенство $ad=bc$ можно переписать в виде $a(2^k-a)=b(2^m-b)$, то есть $b^2-a^2=2^mb-2^ka=2^m(b-2^{k-m}a)$. Таким образом, произведение чисел $b+a$ и $b-a$ делится на 2^m (мы видели, что 2^{k-m} — целое число). В то же время их сумма равна $2b$, а b — нечетное число, поэтому оба эти числа не могут одновременно делиться на 4. А так как эти числа четные, одно из них должно делиться на 2^{m-1} (а другое — только на 2^1). Но $b-a<b<(b+c)/2=2^{m-1}$, поэтому на 2^{m-1} делится $a+b$. Учитывая неравенство $a+b<b+c=2^m$ заключаем, что $a+b=2^{m-1}$.

Таким образом, $b=2^{m-1}-a$, следовательно, $c=2^m-b=2^{m-1}+a$, а $ad=bc=2^{2m-2}-a^2$, то есть $a(a+d)=2^{2m-2}$. Поскольку a — нечетное число, последнее равенство возможно только при $a=1$.

б) Из полученных в конце пункта а) соотношений следует, что числа a, b, c, d и k удовлетворяют условию задачи тогда и только тогда, когда $a=1$, $b=2^{m-1}-1$, $c=2^{m-1}+1$, $d=2^{2m-2}-1$, $k=2m-2$ при $m\geqslant 3$.

А. П. Савин

◆

М899. *Назовем округлением нецелого числа x замену его на одно из двух ближайших целых чисел ($[x]$ или $[x]+1$).*
а) Докажите, что в любом равенстве
$x_1+x_2+\ldots+x_m=y_1+y_2+\ldots+y_n$ все нецелые слагаемые можно округлить так, что равенство останется верным.
б) В таблицу из m строк и n столбцов записаны некоторые числа, причем суммы их по строкам $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и по столбцам $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — целые числа. Докажите, что все нецелые числа в таблице можно округлить так, что суммы по строкам и столбцам не изменятся.
в) Пусть теперь суммы $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$ не обязательно целые. Докажите, что нецелые числа в таблице мож-*

а) Прежде всего, заметим, что утверждение задачи достаточно доказать для равенства вида

$$x_1+\ldots+x_m=0. \qquad (*)$$

(Общий случай сведется к этому, если перенести все слагаемые из правой части в левую и учесть, что округления числа $-y_i$ совпадают с округлениями y_i, взятыми со знаком минус, поскольку $-[y_i]-1\leqslant -y_i\leqslant -[y_i]$.)

Будем округлять числа x_i в равенстве (*) поочередно: одно из них будет округляться, а какое-то другое мы одновременно изменим на такую же величину в противоположном направлении — при этом данное равенство не нарушится. Надо только позаботиться, чтобы округления изменяемых чисел оставались прежними. После не более чем $m-1$ таких шагов мы округлим все числа в равенстве (*), причем оно останется верным.

Итак, пусть в равенстве (*) есть нецелые числа. Очевидно, их, по крайней мере, два, скажем, x_i

но округлить так, что их суммы по строкам и столбцам будут округлением соответствующих сумм $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$.

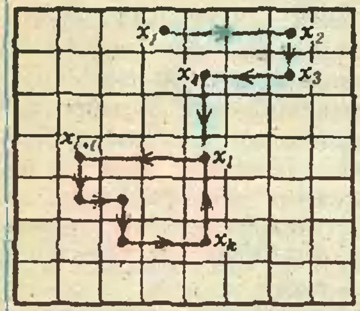


Рис. 1.

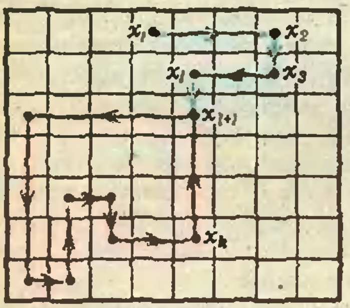


Рис. 2.

и x_j. Допустим, что расстояние d от x_i до ближайшего целого x_i' не больше такого же расстояния для x_j. Заменим x_i на x_i', а x_j на $x_j'=x_j+(x_i-x_i')$. При этом число округленных слагаемых увеличится, их сумма останется нулевой, а округления числа x_j' будут такими же, как у x_j, так как $[x_j]\leqslant x_j'\leqslant[x_j]+1$.

б), в) Будем действовать по тому же плану, как в пункте а). Припишем к i-й строке число $-a_i$, $i=1, \ldots, m$, *под j-м столбцом — число $-b_j$*, $j=1, \ldots, n$, а в правом нижнем углу этой расширенной таблицы поставим сумму всех данных чисел $s=a_1+\ldots+a_m=b_1+\ldots+b_n$. Очевидно, достаточно доказать утверждение б) (или в)) для новой таблицы, то есть при условии, что суммы чисел по всем строкам и столбцам равны нулю. Чтобы это условие сохранилось при округлении очередного числа, нам надо будет вместе с этим числом изменить целую цепочку чисел, причем их округления должны остаться прежними. Опишем построение такой цепочки.

Возьмем в таблице какое-нибудь нецелое число x_1; в одной строчке с ним обязательно есть еще одно нецелое число x_2, в одном столбце с x_2 — нецелое x_3, в одной строчке с x_3 — нецелое x_4 и т. д. (см. рисунки 1, 2). В какой-то момент мы непременно придем к числу, которое стоит в одном ряду (строке или столбце) с числом, встречавшимся ранее. Пусть x_k — первое такое число и пусть оно стоит, скажем, в одном столбце с x_l ($l<k$).

Предположим, что x_{l+1} стоит в одной строке с x_l (рис. 1). Тогда рассмотрим цепочку чисел $x_l, x_{l+1}, \ldots, x_k$. Любые два последовательных числа в этой цепочке стоят в одном ряду (следующим за x_k считаем x_l), причем на каждом шагу цепочка «поворачивает на 90°», поэтому в одной строке, а также в одном столбце с любым из них стоит еще ровно одно, а общее количество чисел в цепочке четно. Выберем то из них, которое стоит ближе всего к целому числу (если таких несколько, то *любое из них), пусть это число x_i*, а ближайшее целое число равно x_i+d. Заменим x_i на его округление x_i+d и, двигаясь по цепочке, будем к каждому следующему числу поочередно добавлять $-d$ или d (x_{i+1} заменим на $x_{i+1}-d$, x_{i+2} — на $x_{i+2}+d$ и т. д.). Когда мы пройдем всю цепочку, получится новая таблица с нулевыми суммами по строкам и столбцам, *округления всех нецелых* чисел в ней будут такими же, как раньше, а количество целых чисел возрастет.

Если окажется, что x_{l+1} стоит в одном *столбце* с x_l (рис. 2), то точно такое же рассуждение надо провести с цепочкой $x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_k$.

После нескольких повторений этой операции все числа в таблице станут целыми.

Для задачи в) мы попутно доказали, что сумма построенных нами округлений чисел исходной таблицы является округлением их суммы.

А. П. Савин

От редакции. Нашим читателям, видимо, будет интересно узнать, что решением задачи М899 (неожиданно для ее автора и для редакции) заинтересовались работники одного из всесоюзных проектных институтов, занимающиеся разработкой комплекса программ ЭВМ, планирующего распределение рабочего времени сотрудников по хоздоговорным темам.

◆

М900. *Может ли проекция на плоскость выпуклого многогранника с 6 гранями быть: а) 8-угольником? б) 9-угольником? в)* Какое наибольшее число сторон может иметь проекция выпуклого многогранника с n гранями?*

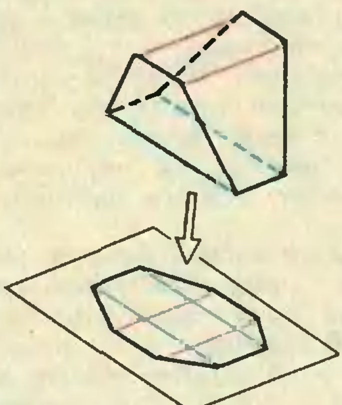


Рис. 1.

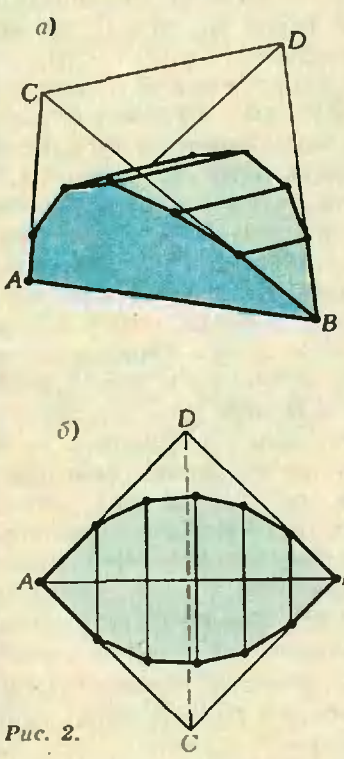


Рис. 2.

а) Ответ: может; см. пример на рисунке 1.

б) Ответ: не может. Доказательство приводится ниже (пункт в)) сразу для общего случая.

в) Ответ: $2n-4$ стороны. Пример n-гранника с $(2n-4)$-угольной проекцией можно получить, срезая у правильного тетраэдра $ABCD$ ребро CD призматической поверхностью с $n-4$ гранями, образующие которой параллельны CD (рис. 2, а). Ортогональная проекция этого многогранника на плоскость, параллельную ребрам AB и CD, имеет $2n-4$ стороны (рис. 2, б). Докажем, что большего числа сторон получить нельзя.

Мы можем предположить, что направление проектирования не параллельно ни одной из граней данного многогранника (иначе можно слегка повернуть многогранник; при этом число вершин проекции может лишь увеличиться). Обозначим его проекцию через П. Ребра многогранника, проектирующиеся на стороны многоугольника П, образуют замкнутый контур, который разбивает поверхность многогранника на два куска. Ребра, лежащие внутри одного куска, окрасим красным цветом, внутри другого — синим. Соответственно окрасим и проекции ребер. В дальнейшем будем рассматривать только проекцию.

Заметим, что из каждой вершины многоугольника П выходит по крайней мере одно красное или синее ребро. Оценим число $m_к$ тех его вершин, из которых выходит хотя бы одно красное ребро. Пусть $p_к$ — число красных ребер; они задают некоторое разбиение многоугольника П. Число многоугольников в этом разбиении обозначим через $n_к$, а число их вершин, лежащих внутри П, — $q_к$ (рис. 3). Из каждой такой вершины выходит не менее трех красных ребер, поэтому число концов красных ребер $2p_к$ не меньше $m_к+3q_к$, то есть

$$m_к+3q_к\leqslant 2p_к. \quad (1)$$

Ниже мы докажем, что

$$p_к=n_к+q_к-1. \quad (2)$$

Подставляя это выражение для $p_к$ в (1), получаем: $m_к\leqslant 2n_к-q_к-2\leqslant 2n_к-2$. Складывая это неравенство с аналогичным неравенством для «синего» разбиения и учитывая, что число m вершин многоугольника П не превосходит $m_к+m_с$ и что $n_к+n_с$ — это число n граней данного многогранника, получим нужную оценку:

$$m\leqslant m_к+m_с\leqslant 2(n_к+n_с)-4=2n-4.$$

Формула (2), по сути дела, эквивалентна известной формуле Эйлера для «плоского графа», составленного из красных ребер (читателям нашего журнала может быть более знакома формула Эйлера для выпуклого многогранника: В—Р+Г=

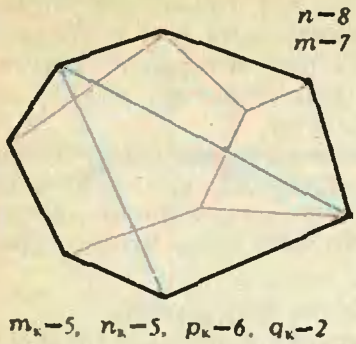


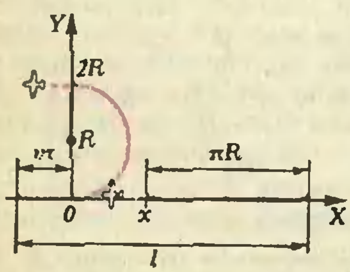
Рис. 3.

$=2$, где В, Р и Г — количества его вершин, ребер и граней *)). Мы выведем (2), следуя одному из многочисленных доказательств формулы Эйлера.

Подсчитаем двумя путями сумму σ всех углов всех многоугольников «красного» разбиения. Сумма углов при вершинах многоугольника П равна $(m-2)\pi$, а сумма углов при $q_к$ «внутренних» вершинах — $2q_к\pi$. Следовательно, $\sigma=(m-2+2q_к)\pi$. С другой стороны, сложив суммы углов каждого из многоугольников разбиения, то есть величин вида $(k-2)\pi$, где k — число сторон многоугольника, мы найдем, что $\sigma=(N-2n_к)\pi$, где N — сумма чисел сторон всех этих многоугольников, равная $m+2p_к$. Таким образом, $m-2+2q_к=m+2p_к-2n_к$, откуда вытекает (2).

М. Д. Ковалев

Ф908. *Самолеты летят по одной прямой навстречу друг другу с одинаковой скоростью v. Предельная дальность обнаружения — l. Один самолет после обнаружения другого совершает разворот, не меняя значения скорости, и летит параллельно второму самолету, который продолжает лететь со скоростью $\vec{v}$. Потеряют ли самолеты друг друга из виду после разворота, если ускорение при повороте равно a? Спустя какое время после обнаружения надо начинать разворот, чтобы в конце разворота расстояние между самолетами оказалось наименьшим?*



◆

Радиус разворота найдем из уравнения $a=v^2/R$:
$$R=v^2/a.$$
Время, за которое происходит разворот, —
$$T=\pi R/v.$$

Направим ось X по начальной скорости первого самолета, а начало координат возьмем в начальной точке разворота. Если разворот начат через время τ после обнаружения, то координата x второго самолета к концу разворота будет
$$x=l-2vt-vT=l-\pi R-2v\tau;$$
к этому моменту координата y первого самолета будет $y=2R$ (см. рисунок). Поэтому расстояние между самолетами после разворота определяется равенством
$$L^2=x^2+y^2=(l-\pi R-2v\tau)^2+4R^2.$$

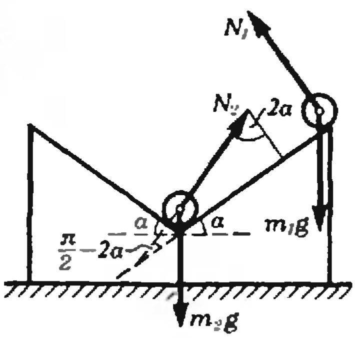
Понятно, что значение $L(\tau)$ минимально при минимально возможном значении $|x(\tau)|$ (y не зависит от τ). В связи с этим возникают два случая: при $l\geqslant\pi R$ наименьшее $L=2R$ достигается при $x=0$, то есть когда
$$\tau=\frac{l-\pi R}{2v}=\frac{1}{2}\left(\frac{l}{v}-\frac{\pi v}{a}\right);$$
при $l<\pi R$ значение L минимально при $\tau=0$ и равно
$$L=\sqrt{4R^2+(l-\pi R)^2}.$$

В случае $l\geqslant\pi R$ наименьшее значение $L=2R$ заведомо меньше предельной дальности обнаружения. Найдем, при каком наименьшем $l=l_0$ самолеты останутся еще в пределах видимости после разворота, то есть когда
$$L^2=4R^2+(l_0-\pi R)^2=l_0^2.$$
Разрешая это уравнение относительно l_0, получим
$$l_0=\frac{4+\pi^2}{2\pi}R=\frac{4+\pi^2}{2\pi}\frac{v^2}{a}.$$
Итак, при $l\geqslant l_0$ самолеты не потеряют друг друга из виду. В противоположном случае ($l<l_0$) после разворота они окажутся вне пределов обнаружения.

И. И. Воробьев

*) См., например, статью М. Шубина «Топология и рельеф местности» («Квант», 1982, № 8, с. 14).

Ф909. *На невесомой горке, образованной двумя гладкими плоскостями, каждая из которых составляет угол α с горизонтальной плоскостью (см. рисунок), находятся два шарика. Горка может без трения скользить по горизонтальной плоскости. Верхний шарик, масса которого m_1, отпускают. При каком условии нижний шарик, масса которого m_2, начнет после этого «забираться» на горку?*



Ясно, что если второй шарик будет достаточно легким, он начнет подниматься на горку. Найдем его предельную массу m_2^0, при которой он еще не начал подниматься, но уже перестал давить на правую наклонную плоскость.

Поскольку горка невесомая, при этом условии сумма горизонтальных проекций сил давления, действующих на горку со стороны шариков, должна быть равна нулю. Это означает, что (см. рисунок)

$$N_1 \sin\alpha = N_2 \sin\alpha, \text{ то есть } N_1 = N_2.$$

Кроме того, поскольку второй шарик не поднимается, проекции ускорений шариков на нормаль к правой наклонной плоскости должны быть одинаковые (и равны проекции ускорения горки на это направление). Как видно из рисунка, угол между силой $\vec{N_2}$ и правой наклонной плоскостью равен $90°-2\alpha$, и, следовательно последнее условие можно записать в виде

$$\frac{m_1 g\cos\alpha - N_1}{m_1} = \frac{m_2^0 g\cos\alpha - N_2\cos 2\alpha}{m_2^0}.$$

Отсюда находим:

$$m_2^0 = m_1\cos 2\alpha.$$

Таким образом, нижний шарик будет «забираться» на горку, если выполнено условие $m_2 < m_1\cos 2\alpha$.

А. И. Буздин

◆

Ф910. *На цилиндр радиуса R одето равномерно растянутое резиновое кольцо массы m. Длина кольца в нерастянутом состоянии равна πR, жесткость резины — k. Цилиндр начинают раскручивать с постоянным угловым ускорением β. Через какое время кольцо начнет проскальзывать относительно цилиндра, если коэффициент трения кольца о цилиндр равен μ? Чему будет равна при этом угловая скорость кольца?*

Рассмотрим маленький элемент кольца, который виден из центра кольца в угле $\Delta\alpha$ (см. рисунок). Масса этого элемента $\Delta m = \frac{m}{2\pi}\cdot\Delta\alpha$. На него действуют сила $\vec{N}$ нормальной реакции со стороны цилиндра, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и силы натяжения со стороны соседних участков кольца (силой тяжести мы пренебрегаем). Так как кольцо растянуто равномерно, силы натяжения по абсолютной величине одинаковы и равны $T = k\pi(2R-R) = k\pi R$. Равнодействующая всех этих сил сообщает элементу кольца ускорение $\vec{a}$. Проекция $\vec{a}$ на направление радиуса — это центростремительное ускорение $a_{\text{ц}}(t)$ в данный момент времени, а проекция $\vec{a}$ на направление касательной к цилиндру — это тангенциальное ускорение $a_\tau(t)$ в данный момент. Поскольку линейная скорость $v(t)$ связана с угловой скоростью $\omega(t)$ соотношением $v(t) = \omega(t)\cdot R = \beta R t$ ($t=0$ — начало вращения),

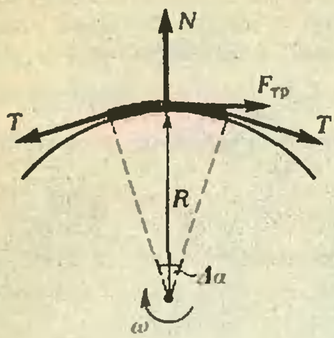
$$a_{\text{ц}}(t) = \frac{(v(t))^2}{R} = \beta^2 R t^2,$$

$$a_\tau(t) = (v(t))' = \beta R.$$

Пусть проскальзывание кольца начинается через время τ после начала вращения. Согласно второму закону Ньютона, при $0 < t < \tau$

$$2T\cdot\frac{\Delta\alpha}{2} - N(t) = \Delta m\cdot a_{\text{ц}}(t) = \frac{m}{2\pi}\cdot\Delta\alpha\cdot\beta^2 R t^2, \quad (1)$$

$$F_{\text{тр}} = \Delta m\cdot a_\tau(t) = \frac{m}{2\pi}\cdot\Delta\alpha\cdot\beta R \quad (2)$$



(мы учли, что $\Delta\alpha$ настолько мало, что $\sin\frac{\Delta\alpha}{2}\approx\frac{\Delta\alpha}{2}$).

Все это время $F_{тр}$ — сила трения покоя. По мере роста скорости сила $N(t)$ уменьшается. Соответственно уменьшается максимальное значение $\mu\cdot N(t)$ силы трения покоя; в момент времени τ оно сравняется со значением $F_{тр}=\Delta m\cdot\beta R$ — начнется проскальзывание.

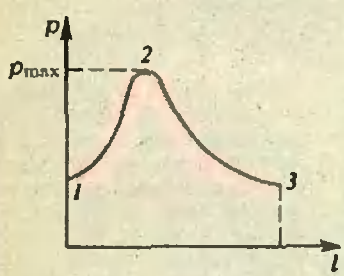
Подставляя в (1) и (2) $t=\tau$ и $F_{тр}=\mu\cdot N(\tau)$, находим значение τ:

$$\tau=\sqrt{\left(\frac{2\mu k\pi^2}{m}-\beta\right)/\mu\beta^2}.$$

А. А. Лапидес

◆

Ф911. *На рисунке приведен график изменения давления пороховых газов в стволе ружья по мере продвижения пули в стволе. Определите скорость сгорания пороха (в кг/с) при давлении p_{max}, если скорость пули в этот момент равна v. Площадь поперечного сечения ствола равна s. Температуру пороховых газов считать постоянной. Известно, что пороховые газы, образующиеся при сгорании массы пороха M, в объеме V_0 создают давление p_0.*



Изменение давления пороховых газов в стволе происходит за счет изменения массы сгорающего пороха и за счет изменения объема, занимаемого газами, по мере продвижения пули. По первой причине должно происходить увеличение давления, по второй — уменьшение. Как видно из рисунка, на участке *1—2* преобладает первая тенденция, а на участке *2—3* — вторая. В момент времени τ, когда давление равно p_{max}, увеличение давления за счет сгорания пороха компенсирует уменьшение давления за счет продвижения пули.

Запишем уравнение состояния газов в тот момент времени τ, когда давление их равно p_{max}:

$$p_{max}V=\frac{m}{\mu}RT,$$

где m — масса сгоревшего к этому времени пороха, V — объем пространства в стволе за пулей. Пусть за малый промежуток времени $\Delta\tau$, в течение которого давление можно считать постоянным и равным p_{max}, сгорает масса пороха Δm. Объем запульного пространства за это время увеличился на

$$\Delta V_1=vs\cdot\Delta\tau$$

($\Delta\tau$ настолько мало, что скорость v пули можно считать постоянной). Давление газов за время $\Delta\tau$ не изменилось; это означает, что газ, образовавшийся при сгорании массы Δm пороха, при давлении p_{max} занимает как раз объем ΔV_1, то есть

$$p_{max}\cdot\Delta V_1=\frac{\Delta m}{\mu}RT,\ \text{или}\ p_{max}vs\cdot\Delta\tau=\frac{\Delta m}{\mu}RT.$$

Из последнего равенства находим скорость сгорания пороха в момент времени τ:

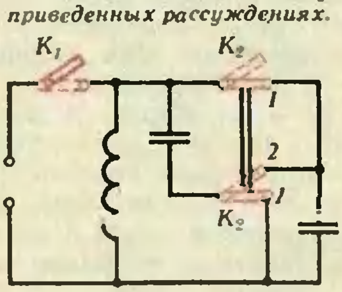
$$\frac{\Delta m}{\Delta\tau}=p_{max}vs\frac{\mu}{RT}.$$

Из условия задачи известно, что $p_0V_0=\frac{M}{\mu}RT$. Отсюда находим, что $\frac{RT}{\mu}=\frac{p_0V_0}{M}$, и окончательно получаем

$$\frac{\Delta m}{\Delta\tau}=\frac{Mp_{max}sv}{p_0V_0}.$$

Л. Г. Маркович

Ф912. *В катушке из сверхпроводящего провода создают постоянный ток, подключив ее к источнику тока через ключ K_1 (см. рисунок). После этого к концам катушки подключают батарею из двух одинаковых конденсаторов, включенных параллельно. Ключ K_1 размыкают, после чего ток начинает течь через конденсаторы, заряжая их. В момент времени, когда напряжение на конденсаторах максимально, а ток равен нулю, двойной ключ K_2 перебрасывают из положения 1 в положение 2, так что конденсаторы оказываются включенными последовательно, а напряжение на катушке удваивается. Поскольку индуктивность катушки не изменилась, а напряжение возросло, максимальный ток через катушку, а значит, и запасенная энергия будут больше первоначальных. Найдите ошибку в приведенных рассуждениях.*



При обоих положениях ключа K_2 система представляет собой колебательный контур. Индуктивность, входящая в контур, в обоих случаях одна и та же, а емкость — разная: в положении 1 $C_1=2C$, а в положении 2 $C_2=\frac{1}{2}C$. Соответственно различны частоты собственных колебаний в контуре:

$$\omega_1=\sqrt{\frac{1}{LC_1}}=\sqrt{\frac{1}{2LC}},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{1}{LC_2}}=\sqrt{\frac{2}{LC}}.$$

Поэтому индуктивное сопротивление в цепи при различных положениях ключа K_2 оказывается различным:

$$X_{1L}=\omega_1 L=\sqrt{\frac{L}{2C}},\quad X_{2L}=\omega_2 L=\sqrt{\frac{2L}{C}},$$

то есть

$$X_{2L}=2X_{1L}$$

— индуктивное сопротивление в положении 2 больше, чем в положении 1, в 2 раза.

Следовательно, увеличение напряжения на катушке в 2 раза «компенсируется» увеличением индуктивного сопротивления, а амплитудное значение тока в катушке остается неизменным:

$$I_{1m}=\frac{U_m}{X_{1L}},\quad I_{2m}=\frac{2U_m}{X_{2L}}=\frac{2U_m}{2X_{1L}}=I_{1m}.$$

Соответственно, энергия, запасенная в катушке, в обоих случаях одна и та же.

Д. В. Павлов

Формула площади сегмента

Площадь сегмента AnB (рис. 1) можно найти по формуле

$$\boxed{S_{\text{сегм}}=\frac{\pi R^2}{360^\circ}\cdot\alpha-\frac{R^2}{2}\sin\alpha,} \qquad (1)$$

где центральный угол α выражен в градусах; или, если этот же угол в радианах равен φ, по формуле

$$\boxed{S_{\text{сегм}}=\frac{R^2}{2}(\varphi-\sin\varphi).} \qquad (2)$$

Формулу (1) легко вывести: площадь сегмента AnB равна разности площадей сектора $OAnB$ ($\frac{\pi R^2}{360^\circ}\cdot\alpha$, то есть площадь сектора в один градус, умноженная на количество градусов) и треугольника OAB ($(R^2/2)\sin\alpha$).

Эта полезная формула замечательна тем, что она верна не только для случая, когда $\alpha<180^\circ$ (как на рисунке 1), но и при любых α, в том числе $\alpha\geqslant180^\circ$ (рис. 2, 3). Действительно, при $\alpha>180^\circ$ (рис. 2) к площади сектора $OAnB$ нужно прибавить площадь треугольника OAB, но в этом случае $\sin\alpha<0$ и формула (2) снова дает правильный ответ! Случай $\alpha=180^\circ$ тоже подходит под формулу (2), так как тогда $\sin\alpha=0$, а площадь вырожденного треугольника OAB равна нулю (рис. 3).

При переходе через угол $\alpha=180^\circ$ знак синуса изменяется с плюса на минус; на рисунке это как раз отвечает тому, что заштрихованные фигуры нужно не вычитать, а складывать. Подобный же эффект наблюдается в теореме косинусов, когда знак меняется при переходе через угол $\gamma=90^\circ$.

Б. С. Эппель

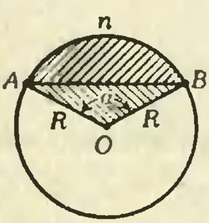


Рис. 1.

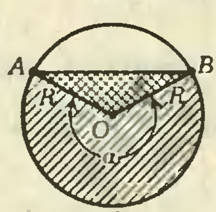


Рис. 2.

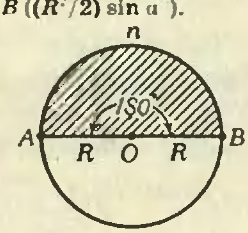
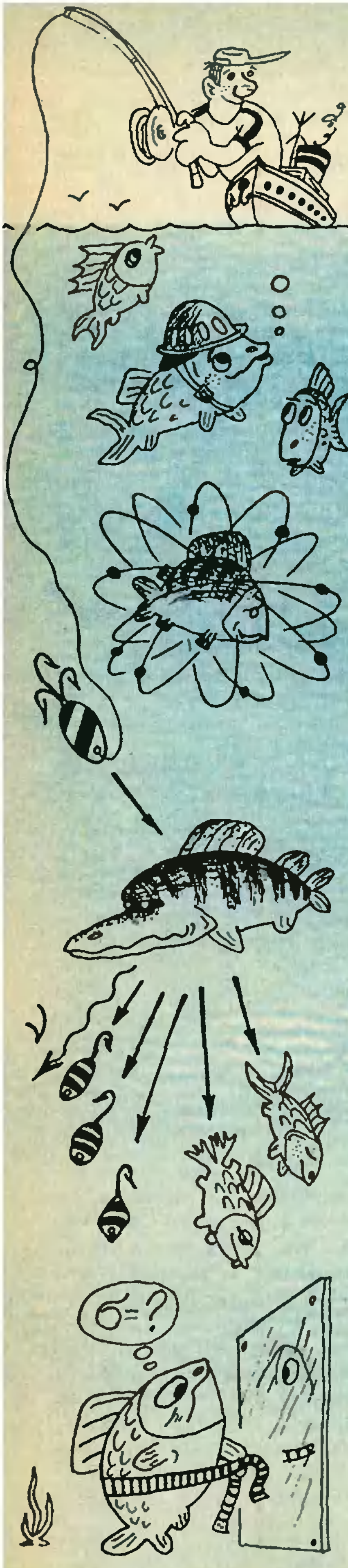


Рис. 3.

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ



Рыбная ловля глазами ученого

Это было давно, когда я только кончил институт и приехал работать в будущую Дубну — маленький поселок Иваньково, окруженный со всех сторон водой. Естественно, что обилие воды вокруг привело к всеобщему увлечению водным туризмом и рыбалкой.

Я предпочитал байдарку, но рыбы вокруг было так много, что друзья уговорили меня посвятить рыбалке целый отпуск, чему немало содействовало решение нашего административного директора приобрести для отдыха сотрудников института старый списанный пароход. Я купил в Москве самый дорогой спиннинг, с трудом нашел в одном из магазинов редкую в то время безынерционную спиннинговую катушку и запасся всевозможными блеснами, от набора для начинающего рыболова до блесен для ловли тайменя.

Наконец, ключи от каюты на «Санта-Марии» (так назывался среди дубненцев наш пароход) были в моем кармане. Три недели каждый день с восхода солнца и до вечера я бросал блесну. Я уже знал все коряги на дне Московского моря, на которых навечно оставались мои блесны. Но улов не радовал. За три недели я поймал 3 рыбы: одну щуку и двух окуней, причем окуни зацепились за крючок плавниками. Выходило, что рыбу не интересовали ни блёсны на тайменя, ни блёсны начинающего спиннингиста. Зацеплялась она за мой крючок случайно.

На этом я закончил рыбалку и занялся расчетами. Если взаимодействие крючка с рыбой происходило случайно, то вероятность такого столкновения, как в ядерной физике, можно было характеризовать величиной, называемой сечением процесса. Естественно было предполагать, что сечение взаимодействия крючка с рыбой σ равно средней площади проекции одной рыбины на плоскость, перпендикулярную направлению движения блесны. Зная средний размер пойманных мною рыб и прикинув длину свободного пробега блесны λ (средний путь, пройденный блесной в воде до столкновения с очередным окунем), $\lambda \approx 5 \cdot 10^6$ см, я вычислил из результатов трехнедельных экспериментов среднюю плотность рыбы в Московском море:

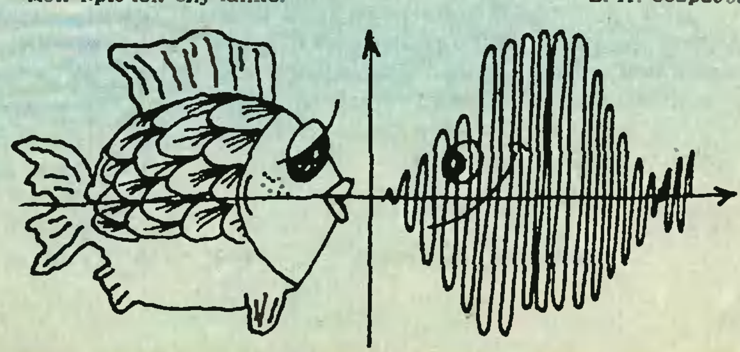
$$n = \frac{1}{\lambda\sigma} = \frac{1}{5 \cdot 10^6\ \text{см} \cdot 30\ \text{см}^2} = 10^{-8}\ \text{см}^{-3}.$$

Проверить эту цифру было несложно. Рядом с «Санта-Марией» располагалась Конаковская рыболовецкая артель. На следующее утро с баркаса бригадира артели я оценил объем воды, прочесываемой неводом ($V \approx 10^{11}$ см^3), и сосчитал количество попавшихся в невод рыб ($N \approx 10^3$). Плотность рыб

$$n = \frac{N}{V} = 10^{-8}\ \text{см}^{-3}$$

совпала с оценкой из данных по блеснению. Эксперимент был закончен. Доказано, что мой новый спиннинг с безынерционной катушкой рыб не привлекал.

В. А. Свиридов



Метрические соотношения в треугольнике

Кандидат физико-математических наук
А. А. БОЛИБРУХ,
Кандидат физико-математических наук
В. М. УРОЕВ,
профессор М. И. ШАБУНИН

Опыт проведения экзаменов в вузы показывает, что многие абитуриенты не обладают достаточными навыками в решении геометрических задач. Самые простые планиметрические задачи порой становятся камнем преткновения даже для тех абитуриентов, которые успешно справляются с вопросами по алгебре и тригонометрии. Причем это относится не только к задачам, для решения которых необходимо проявить определенную изобретательность, но и к задачам, решаемым с применением стандартных теорем и формул школьного курса, таких, как теорема косинусов, теорема синусов, формулы площади треугольника и др.

В настоящей статье рассматриваются задачи, в основном предлагавшиеся в разные годы на вступительных экзаменах в МФТИ. Из большого материала авторы отобрали задачи, при решении которых используются основные метрические соотношения между элементами треугольника.

Выпишем эти соотношения. Рассмотрим треугольник ABC и введем следующие обозначения: $a=|BC|$, $b=|AC|$, $c=|AB|$, R — радиус описанной около треугольника ABC окружности, r — радиус вписанной окружности, h_a — длина высоты, опущенной на сторону BC, S — площадь треугольника. Тогда

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R$$

(теорема синусов), (I)

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$

(теорема косинусов), (II)

$$S=\frac{1}{2}h_a a, \qquad \text{(III)}$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\hat{A}, \qquad \text{(IV)}$$

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)r. \qquad \text{(V)}$$

Эти формулы абитуриент должен знать, уметь их доказывать, а также применять их при решении задач. Есть и другие формулы, знание которых уже не предусмотрено программой для поступающих, но которые часто бывают полезны при решении задач. Например, формула Герона

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad \text{(VI)}$$

где $p=(a+b+c)/2$ — полупериметр треугольника или формула

$$S=\frac{abc}{4R}, \qquad \text{(VII)}$$

которая легко получается, подставляя значение $\sin\hat{A}$, найденное из теоремы синусов (I), в формулу (IV).

Начнем с задач на применение теоремы синусов.

1. *В равнобедренном треугольнике ABC ($|AB|=|BC|$) медиана AD и биссектриса CE перпендикулярны. Определите величину угла ADB.*

Решение. Пусть α — искомый угол, O — точка пересечения отрезков AD и CE (рис. 1). В $\triangle ADC$ биссектриса CO является одновременно высотой, значит, $\triangle ADC$ — равнобедренный и $\widehat{DAC}=\widehat{ADC}=\pi-\alpha$, $\hat{A}=\hat{C}=2\alpha-\pi$, $\widehat{BAD}=\hat{A}-\widehat{DAC}=3\alpha-2\pi$. В треугольнике ABD согласно условию $|BD|=1/2|AB|$. Применяя теорему синусов, получаем $\frac{|AB|}{\sin\alpha}=\frac{|BD|}{\sin(3\alpha-2\pi)}$, откуда $\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{2\sin 3\alpha}$, $2\sin 3\alpha=\sin\alpha$, $2\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)=\sin\alpha$, $\sin^2\alpha=5/8$. Но из условия задачи следует, что $\widehat{DCO}=\alpha-\pi/2>0$, с другой стороны, $\alpha<\pi$, то есть $\pi/2<\alpha<\pi$, поэтому $\sin\alpha=\sqrt{10}/4$, $\alpha=\pi-\arcsin\sqrt{10}/4$.

Ответ: $\pi-\arcsin\sqrt{10}/4$.

2. *В равнобедренном треугольнике ABC длина высоты BD, опущенной на основание, равна h, а радиус вписанной окружности равен r. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.*

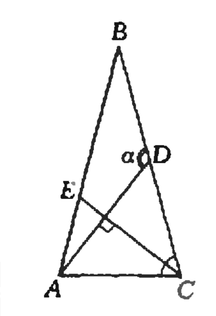


Рис. 1.

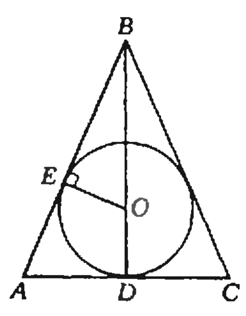


Рис. 2.

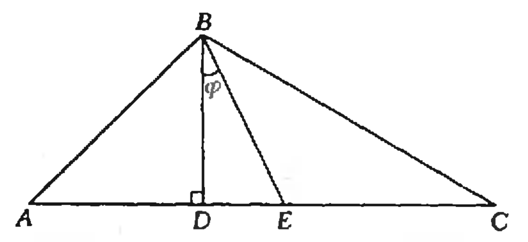


Рис. 3.

Решение. Пусть O — центр вписанной окружности, E — точка касания окружности с отрезком AB, $|AC| = b$ (рис. 2). По теореме синусов радиус R описанной окружности равен $\frac{b}{2\sin\hat{B}}$. Из $\triangle BOE$ находим $\sin\frac{\hat{B}}{2} = \frac{|OE|}{|OB|} = \frac{r}{h-r}$. С другой стороны, $\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2} = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{b}{2h}$, отсюда

$$b = 2h\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2} \text{ и } R = \frac{h\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2}}{\sin\hat{B}} = \frac{h}{2\cos^2\frac{\hat{B}}{2}} = \frac{(h-r)^2}{2(h-2r)}.$$

Ответ: $\frac{(h-r)^2}{2(h-2r)}$.

3. *Углы при вершинах A и C треугольника ABC соответственно равны $\pi/4$ и $\pi/6$. Найдите угол между высотой BD и медианой BE этого треугольника.*

Решение. Обозначим $|AB| = c$, $|AC| = b$, $\widehat{DBE} = \varphi$ (рис. 3). Тогда $|AD| = c\cos\hat{A} = c\sqrt{2}/2$, $|DE| = |BD| \times \operatorname{tg}\varphi = (c\sqrt{2}\operatorname{tg}\varphi)/2$. Следовательно, $b/2 = |AE| = |AD| + |DE| = c\sqrt{2} \times (1+\operatorname{tg}\varphi)/2$. По теореме синусов для $\triangle ABC$ получаем $\frac{c}{\sin\hat{C}} = \frac{b}{\sin\hat{B}}$, где $\sin\hat{B} = \sin(\pi - \hat{A} - \hat{C}) = \sin(\hat{A} + \hat{C}) = \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times (1+\sqrt{3})$.

Отсюда находим

$$\frac{c}{1/2} = \frac{4c(1+\operatorname{tg}\varphi)}{1+\sqrt{3}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \qquad (1)$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

При решении следующих задач используется теорема косинусов.

4. *Биссектрисы AD и CF треугольника ABC пересекают стороны BC и AB в точках D и F соответственно. Найдите длину отрезка FD, если $|AC| = 6$, $|AF| = 2$, $|CD| = 3$.*

Решение. Обозначим $|BD| = x$, $|BF| = y$ (рис. 4). Воспользуемся важным свойством биссектрисы: биссектриса делит сторону треугольника на части, пропорциональные длинам прилежащих сторон. Таким образом, $|AB|/|AC| = x/3$, $|BC|/|AC| = y/2$ или $(2+y)/6 = x/3$, $(x+3)/6 = y/2$, откуда $x = 9/5$, $y = 8/5$, $|AB| = 18/5$, $|BC| = 24/5$. Для вычисления $|DF|$ воспользуемся теоремой косинусов для $\triangle FBD$.

$$|DF|^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\hat{B}, \qquad (2)$$

где $\cos\hat{B}$, в свою очередь, найдем из соотношения $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC|\cos\hat{B}$. Подставляя най-

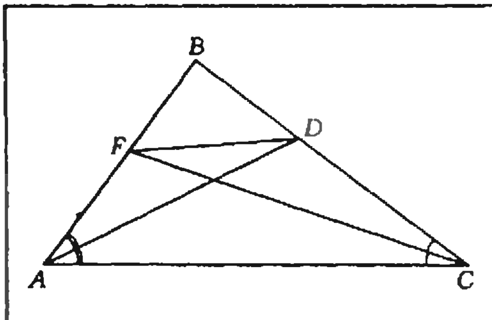


Рис. 4.

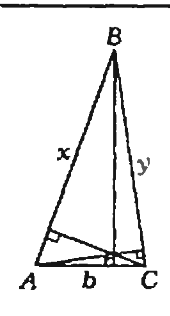


Рис. 5

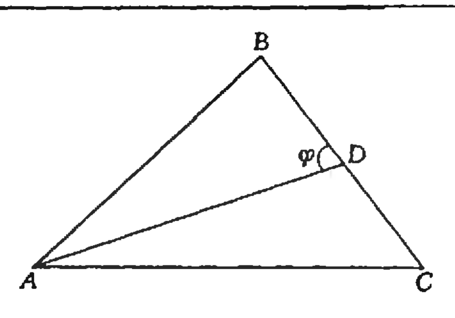


Рис. 6.

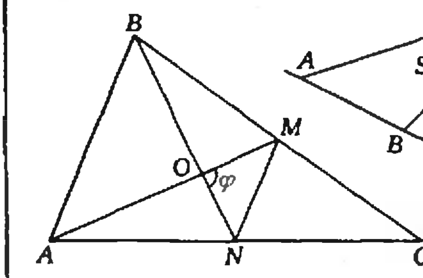


Рис. 7.

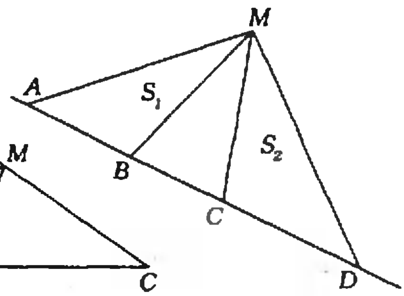


Рис. 8.

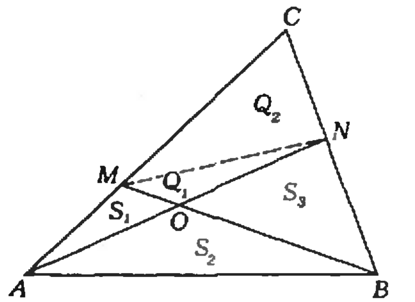


Рис. 9.

денные значения длин сторон $\triangle ABC$, получаем $36=\frac{18^2}{25}+\frac{24^2}{25}-\frac{2\cdot 18\cdot 24}{25}\times$ $\times\cos\hat{B}$, откуда $\cos\hat{B}=0$, $\hat{B}=\pi/2$, $|DF|=\sqrt{145}/5$.

Ответ: $\sqrt{145}/5$.

5. *В треугольнике* ABC: $\hat{B}=\arccos\frac{7}{8}$, $|AC|=b$, *а высота, опущенная из вершины* B, *равна сумме двух других высот. Найдите площадь треугольника* ABC.

Решение. Пусть $|AB|=x$, $|BC|=y$ (рис. 5). Тогда по теореме косинусов

$$b^2=x^2+y^2-2xy\cos\hat{B}=x^2+y^2-\frac{7}{4}xy. \qquad (3)$$

Далее, $h_b=\frac{2S}{b}$, $h_x=\frac{2S}{x}$, $h_y=\frac{2S}{y}$, где S — площадь $\triangle ABC$, а h_b, h_x, h_y — его высоты. Так как по условию задачи $h_b=h_x+h_y$, то $\frac{1}{b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ или $x+y=$ $=\frac{xy}{b}$, откуда $x^2+y^2=\frac{(xy)^2}{b^2}-2xy$. Отсюда и из уравнения (3) получаем уравнение относительно $z=xy$:

$$b^2=\frac{z^2}{b^2}-2z-\frac{7}{4}z,$$

откуда $z=xy=4b^2$. Поэтому $S=$ $=\frac{xy\sin\hat{B}}{2}=\frac{\sqrt{15}}{4}b^2$.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{4}b^2$.

Замечание к теореме косинусов. С помощью теоремы косинусов легко получить формулу, выражающую длину медианы через длины сторон треугольника. Обозначим $|AB|=c$, $|AC|=b$, $|BC|=a$, длину медианы AD через m_a, $\widehat{BDA}=\varphi$ (рис. 6). По теореме косинусов для треугольников ABD и ADC получаем:

$$a^2/4+m_a^2-am_a\cos\varphi=c^2,$$
$$a^2/4+2m_a^2-am_a\cos(\pi-\varphi)=b^2.$$

Складывая эти уравнения и используя то, что $\cos(\pi-\varphi)=-\cos\varphi$, находим $a^2/2+2m_a^2=c^2+b^2$, откуда

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}. \qquad (4)$$

6. *В треугольнике* ABC *длины сторон связаны соотношением* $|BC|^2+$ $+|AC|^2=5|AB|^2$. *Найдите угол между медианами* AM *и* BN.

Решение. Обозначим $|AB|=c$, $|BC|=a$, $|AC|=b$, $\widehat{NOM}=\varphi$, $|AM|=$ $=m_a$, $|BN|=m_b$ (рис. 7). Поскольку в точке пересечения медианы делятся в отношении 2:1, считая от вершины, то согласно формуле (4), получаем:

$$|OM|=\frac{m_a}{3}=\frac{1}{6}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2},$$

$$ON=\frac{m_b}{3}=\frac{1}{6}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}.$$

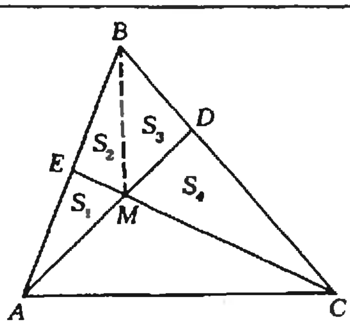


Рис. 10.

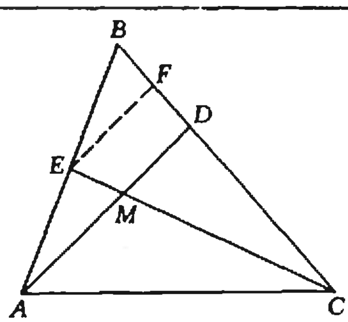


Рис. 11.

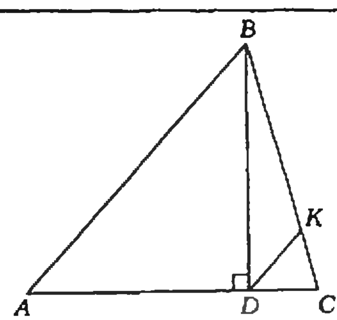


Рис. 12.

По теореме косинусов для $\triangle NOM$ с учетом того, что $|MN|=\frac{c}{2}$, находим $\frac{m_a^2}{9}-\frac{m_b^2}{9}-\frac{2m_am_b}{9}\cos\varphi=\frac{c^2}{4}$ или $2b^2+$ $+2c^2-a^2+2a^2+2c^2-b^2-8m_am_b\cos\varphi=$ $=9c^2$, откуда $8m_am_b\cos\varphi=a^2+b^2-5c^2$. Значит, $\varphi=\pi/2$.

Ответ: $\pi/2$.

Рассмотрим несколько задач, в которых применяются различные формулы для вычисления площади S треугольника ABC.

Используя формулу (III), легко доказать следующее утверждение: если отрезки AB и CD лежат на одной прямой, не проходящей через точку M, и S_1 и S_2 — площади треугольников MAB и MCD соответственно (рис. 8), то

$$S_1/S_2=|AB|/|CD|. \qquad (5)$$

7. *В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M, а на стороне BC — точка N. Отрезки BM и AN пересекаются в точке O (рис. 9). Найдите площадь треугольника CMN, если площади треугольников AOM, AOB и BON соответственно S_1, S_2, S_3.*

Решение. Пусть $S_{\triangle MON}=Q_1$, $S_{\triangle CMN}=Q_2$. Из (5) следует, что $S_1/Q_1=|AO|/|ON|=S_2/S_3$, откуда $Q_1=S_1S_3/S_2$. Аналогично $Q_2/(Q_1+$ $+S_3)=|CN|/|NB|=(Q_2+Q_1+S_1)/$ $/(S_2+S_3)$, откуда $Q_2=(Q_1^2+Q_1S_1+$ $+Q_1S_3+S_1S_3)/(S_2-Q_1)$. Подставляя в последнюю формулу найденное значение Q_1, получаем Q_2.

Ответ: $\frac{S_1S_3(S_2+S_1)(S_2+S_3)}{S_2(S_2^2-S_1S_3)}$.

8. *В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $|BD|:|CD|=1:2$. В каком отношении медиана CE делит отрезок AD?*

Первый способ решения основан на сравнении площадей треугольников. Пусть M — точка пересечения $[AD]$ и $[CE]$ (рис. 10). Обозначим S_1, S_2, S_3, S_4 площади треугольников AEM, EMB, MBD, CMD соответственно. Используя формулу (5), получаем:

$$S_1=S_2,\ S_4=2S_3,$$

$$S_{\triangle ABD}=2S_1+S_3=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC},$$

$$S_{\triangle EBC}=3S_3+S_1=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

Отсюда $S_{\triangle ABC}=3(2S_1+S_3)=2(3S_3+$ $+S_1)$, или $3S_3=4S_1$. Теперь легко найдем искомое отношение: $|AM|:|MD|=$ $=S_{\triangle ABM}:S_{\triangle BMD}=2S_1:S_3=3:2$.

Второй способ. Проведем через точку E прямую EF, параллельную (AD) и пересекающую сторону BC в точке F (рис. 11). Тогда $[EF]$ — средняя линия в треугольнике ABD и поэтому $|EF|=\frac{1}{2}|AD|$ и $|BF|=|FD|=$ $=\frac{1}{6}|BC|$. Из подобия треугольников CMD и CFE следует, что

$$\frac{|MD|}{|EF|}=\frac{|CD|}{|CF|}=\frac{\frac{2}{3}|BC|}{\frac{5}{6}|BC|}=\frac{4}{5}.$$

Отсюда $|MD|=\frac{4}{5}|EF|=\frac{2}{5}AD$, то есть $|AM|:|MD|=3:2$.

Ответ: $3:2$.

9. *В треугольнике ABC через основание D высоты BD параллельно стороне AB проведена прямая, пересекающая $[BC]$ в точке K. Найдите $|BK|:|KC|$, если $S_{\triangle DBK}:S_{\triangle ABC}=3:16$.*

Решение. По теореме Фалеса $|BK|:|KC|=|AD|:|DC|$ (рис. 12). Обозначим $|BK|/|KC|=x$, по формуле (5) получаем:

$$S_{\triangle DBK}/S_{\triangle DBC}=|BK|/|BC|=x/(1+x),$$
$$S_{\triangle ABC}/S_{\triangle DBC}=|AC|/|DC|=x+1.$$

Следовательно, $S_{\triangle DBK}/S_{\triangle AOC}=$ $=x/(1+x)^2$. Решая уравнение $x/(1+x)^2=3/16$, находим $x_1=3$, $x_2=1/3$.

Ответ: 3 или $1/3$.

10. *Все стороны треугольника меньше 1 см. Докажите, что площадь треугольника меньше $\sqrt{3}/4$ см^2.*

Решение. Заметим, что хотя бы один из углов треугольника не превосходит $60°$, в противном случае их сумма была бы больше $180°$. Пусть, например, угол C между сторонами AC и BC треугольника меньше $60°$. Вычисляя площадь треугольника по формуле (IV), получаем оценку: $S=$ $=\frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}<\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ (см^2).

11. *На стороне AC треугольника ABC взята точка N, а на стороне BC — точка M так, что $|CN|:|NA|=5$. Площади многоугольников NMC и $ANBM$ относятся как $5:6$. Найдите $|CM|:|MB|$.*

Решение. Пусть $|CM|/|BC|=k$ (рис. 13). По формуле (IV) получаем: $S_{\triangle NMC}=\frac{1}{2}|NC|\cdot|CM|\sin\widehat{C}=\frac{1}{2}\times$ $\times\frac{5}{6}|AC|\cdot k|BC|\sin\widehat{C}=\frac{5}{6}kS_{\triangle ABC}$, откуда $S_{ABMN}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle NMC}=$

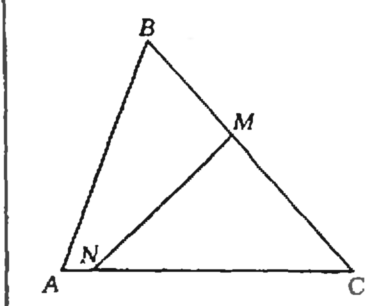


Рис. 13.

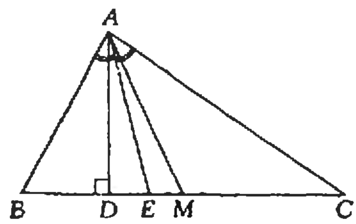


Рис. 14.

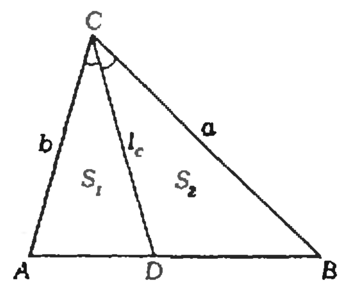


Рис. 15.

$=\left(1-\frac{5}{6}k\right)S_{\triangle ABC}$ Согласно условию

$$\frac{\left(1-\frac{5}{6}k\right)}{\frac{5}{6}k}=\frac{6}{5},$$ следовательно, $k=6/11$ и $|CM|:|MB|=6:5$.

Ответ: 6:5.

12. *В треугольнике ABC проведены медиана AM, биссектриса AE и высота AD. Площадь треугольника AEM равна $1/14$ площади треугольника ABC, а площадь треугольника ADM равна $7/50$ площади треугольника ABC. Найдите углы треугольника ABC.*

Решение. Обозначим $|BC|=a$, $|AC|=b$, $|AB|=c$ (рис. 14). Из формулы (5) вытекает, что $|EM|=a/14$, $|DM|=7a/50$. Отсюда $|BD|=|BM|-|MD|=9a/25$, $|CD|=16a/25$, $|BE|=|BM|-|EM|=3a/7$, $|CE|=4a/7$. По свойству биссектрисы треугольника получаем:

$$|BE|/|EC|=c/b,\ c/b=3/4. \qquad (6)$$

Из треугольников BAD и ACD находим длину катета AD:

$$|AD|^2=c^2-(9/25)^2a^2=b^2-(16/25)^2a^2. \qquad (7)$$

Решая систему уравнений (6)—(7), получаем: $b=4/5a$, $c=3/5a$, следовательно, $b^2+c^2=a^2$. Отсюда легко выразить искомые углы.

Ответ: $\hat{A}=90^\circ$, $\hat{B}=\arcsin(4/5)$, $\hat{C}=\arcsin(3/5)$.

13. *Пусть l_c — длина биссектрисы угла C треугольника ABC* (рис. 15). *Докажите, что тогда*

$$l_c=2ab\cos\frac{\hat{C}}{2}/(a+b). \qquad (8)$$

Решение. Для доказательства формулы (8) достаточно выразить площади S_1, S_2, S треугольников ACD, CDB, ABC по формуле (IV):

$$S_1=\frac{bl_c}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2},\quad S_2=\frac{al_c}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2},$$

$$S=\frac{ab}{2}\sin\hat{C}, -$$

и воспользоваться равенством $S_1+S_2=S$.

Упражнения

1. В равнобедренном треугольнике ABC точки D и E делят боковые стороны в отношении $|BD|:|DA|=|BE|:|EC|=3$. Найдите углы треугольника, если $(AE)\perp(CD)$.

2. Прямая, проходящая через *вершину* A равнобедренного треугольника ABC ($|AB|=|BC|$) и центр вписанной в него окружности, пересекает сторону BC в точке D. Найдите отношение $|AD|/|AB|$, если $\hat{B}=\alpha$.

3. Через вершину A равнобедренного треугольника ABC ($|AB|=|BC|$) и центр описанной около него окружности проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D. Найдите $|AD|$ и радиус описанной окружности, если $|AB|=c$, $ABC=\alpha$.

4. В треугольнике ABC угол A вдвое больше угла C, $|AB|=c$, $|AC|=b$. Найдите $|BC|$.

5. В треугольнике ABC перпендикуляр, проходящий через середину стороны AB, пересекает продолжение стороны BC в точке M. Перпендикуляр, проходящий через середину стороны BC, пересекает сторону AC в точке N. Известно, что $|AN|/|NC|=1/2$, $|MC|/|MB|=1/5$. Найдите углы треугольника ABC.

6. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки D и E соответственно, так что $|BD|=|DE|=|EC|$. Найдите площадь треугольника ADE, если $|AB|=2$, $|AC|=3$, $|BC|=\sqrt{7}$.

7. Точка L лежит на стороне AC треугольника ABC. Отрезок BL пересекает медиану CM в точке O. Известно, что площадь треугольника BMO равна 3 см^2, а площадь четырехугольника $AMOL$ равна 4 см^2. Найдите площадь треугольника ABC.

8. На сторонах AB и BC треугольника выбраны точки M и N. Отрезки CM и AN пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOM и CON равны тогда и только тогда, когда прямые MN и AB параллельны.

9. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC расположены соответственно точки M и N так, что $|AM|:|BM|=3:2$, $|CN|:|BN|=5:2$. Прямая MN пересекает высоту BD треугольника в точке O. Найдите отношение $|DO|/|BO|$.

10. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса CD прямого угла C. Известно, что $|AD|=3$ см, $|BD|=1$ см. Найдите высоту, опущенную из вершины угла C.

11. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису, если $|AB|:|AC|=3:2$?

Заочная физическая школа при МГУ

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (МГУ) объявляет прием учащихся в 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения, в первую очередь — на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать *до 1 сентября* по адресу: 119899, Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ. В письмо вложите также два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7×12 см и заполненной по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество	*Сидоров Иван Петрович*
Класс ЗФШ	*9-й*
Профессия родителей	*мать — врач* *отец — инженер*
Подробный домашний адрес	*248016, г. Калуга, ул. К. Либкнехта, д. 4, кв. 73*
Номер и адрес школы	*школа № 10, ул. Пушкина, д. 3.*

Решение приемной комиссии ЗФШ о зачислении будет сообщено до 15 октября. Проверенные вступительные задания обратно не высылаются.

Зачисленным в ЗФШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания по разделам физики, изучаемым в средней школе. Решенные задания оцениваются, рецензируются и высылаются обратно. Учащиеся 9 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 10 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно окончившие обучение получают справку об окончании ЗФШ.

Вступительное задание

Поступающие в 9 класс ЗФШ решают задачи 1—4, а поступающие в 10 класс — задачи 4—7.

1. «Точка встречи». Вертикально вверх с интервалом времени τ выброшены из одной и той же точки два шарика со скоростью v каждый. Через какое время после вылета второго шарика они столкнутся?

2. «Монета на клине». На клине с углом α лежит монета. С каким наименьшим ускорением должен двигаться клин по горизонтальной плоскости, чтобы монета свободно падала вниз?

3. «Лошадиная сила». Какую мощность развивает лошадь при движении саней, если она равномерно тянет их в гору со скоростью u? Масса саней m, коэффициент трения μ, угол наклона горы α.

4. «Сверхсветовая скорость». Два стержня пересекаются под углом 2α и движутся с одинаковыми скоростями v перпендикулярно самим себе. Какова скорость точки пересечения стрежней? Может ли она превысить скорость света?

5. «Связанные заряды». Три заряда q_1, q_2 и q_3, связанные друг с другом двумя нитями длиной l, находятся на одной прямой. Чему равны силы натяжения нитей?

6. «Неизвестная формула». Найдите формулу соединения азота с кислородом, если $m=1$ г его в газообразном состоянии в объеме $V=1$ л создает при температуре $t=17$ °C давление $p=314$ гПа.

7. «Черный ящик». К ящику с двумя клеммами подключили амперметр, резистор сопротивлением $R=1$ Ом и источник постоянного напряжения $U_1=5$ В (соединение последовательное). Амперметр показал ток $I_1=1$ А. Когда включили другой источник напряжения $U_2=20$ В, амперметр показал ток $I_2=2$ А. Что находится внутри ящика?

Советуем купить

(Начало см. на с. 11)

Вып. 42. Л. В. Тарасов. Лазеры: действительность и надежды.

Вып. 43. М. В. Волькенштейн. Энтропия и информация.

Вып. 44. Л. Е. Садовский, А. Л. Садовский. Математика и спорт.

Вып. 45. Л. Б. Окунь. α, β, γ, ..., z (элементарное введение в физику элементарных частиц).

Вып. 46. Я. Е. Гегузин. Пузыри.

Вып. 47. Л. С. Марочник. Свидание с кометой.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультет прикладной математики — процессов управления)

1. Частоты x, y генов a, b соответственно преобразуются в результате одного тура отбора в новые частоты

$$x' = \frac{x(kx+y)}{kx^2+2xy+ky^2},\quad y' = \frac{y(x+ky)}{kx^2+2xy+k},$$

генов a, b следующего поколения. Определить первоначальные частоты, если известно, что коэффициент приспособленности $k=1/2$, а в следующем поколении на каждые 40 генов a приходятся 33 гена b.

2. Решить уравнение

$$\cos 3x = -\cos x \operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right).$$

3. При каком значении $b \in [0;\ 1]$ максимальная абсолютная погрешность приближенной формулы

$$\sqrt{x} \approx b\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{4}x-\frac{x^2}{8}\right)+ (1-b)\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{8}x-\frac{x^2}{64}\right)$$

на промежутке $[1;\ 4]$ будет наименьшей?

4. В окружность радиуса R вписан равносторонний треугольник. Найти на окружности точку, для которой сумма расстояний до двух ближайших вершин треугольника есть данная величина L.

5. Шар радиуса R и окружность радиуса $5/4\,R$ имеют общий центр O. Точка A расположена в пространстве так, что $|AO|=5R/4$ и множество точек данной окружности, которые можно соединить с A прямой, не пересекающейся с шаром, есть дуга, соответствующая центральному углу α. Найти угол между $[OA]$ и плоскостью, содержащей данную окружность.

Вариант 2

(математико-механический факультет)

1. На промежутке $\left[\frac{1}{4},\ 10\right]$ определить наибольшее значение абсолютной погрешности приближенного вычисления $y=\sqrt{x}$ по следующему правилу: если $(k-1)^2 \leqslant x < k^2$ $(k=1, 2, \ldots)$, то

$$\sqrt{x} \approx \frac{3}{8}k + \frac{3x}{4k} - \frac{x^2}{8k^3}.$$

2. Решить уравнение

$$\sin 4x(2+\sin 14x) = 2\operatorname{ctg} 3x \cdot \cos 4x.$$

3. При каком условии на коэффициенты a, b линейная замена

$$x=aY+bZ,$$
$$y=aZ+bX,$$
$$z=aX+bY$$

оставляет неизменной кубическую форму

$$Q(x,\ y,\ z)=x^3+y^3+z^3-3xyz?$$

4. В равнобедренной трапеции диагональ перпендикулярна к боковой стороне, большее основание равно a, а сумма меньшего основания и боковой стороны равна $3a/4$. Найти меньшее основание.

5. Через вершину A правильного тетраэдра $ABCD$, ребро которого равно a, проведена плоскость, параллельная CD. Известно, что сечение AEF тетраэдра плоскостью есть треугольник периметра p. Найти $|BE|$.

Вариант 3

(физический факультет)

1. При столкновении двух частиц, движущихся навстречу друг другу, в результате слипания и последующего расщепления рождается серия новых частиц общей массы M. Известно, что новые частицы разлетаются в различных направлениях, составляющих угол α с направлением движения одной из первоначальных частиц, но с одинаковыми скоростями, равными скорости второй из первоначальных частиц, причем эта вторая частица до столкновения имела импульс P. Определить наименьшую из возможных скоростей сближения сталкивающихся частиц.

2. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x + \sin 2x = \operatorname{ctg} 3x.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x\left(\frac{y}{9}\right) + \frac{3x}{y(x+9)} = 0, \\ (y-2)^{-1} = (y-2)^{-\log_x(x+8)}. \end{cases}$$

4. Вершины одного квадрата лежат на границе второго квадрата. Найти отношения длин отрезков, на которые эти вершины разбивают стороны второго квадрата, если известно, что отношение площадей квадратов равно p.

5. В цилиндр вписана правильная треугольная пирамида так, что одно из ее боковых ребер есть образующая цилиндра. Найти объем пирамиды по радиусу R основания цилиндра и по величине двугранного угла α при боковом ребре пирамиды.

Вариант 4

(химический факультет)

1. Два слитка серебра с медью имеют одинаковый вес. Каждый из них сплавляют с таким количеством меди, какое имеется в другом. В результате получаются два новых слитка, отношение весов которых равно $6/7$, а отношение проб — $7/8$. Каковы пробы обоих первоначальных слитков? (Проба сплава есть отношение веса благородного металла к общему весу сплава.)

2. Решить уравнение

$$x-\log_3\sqrt{31-9x}=1-\log_3\sqrt{1+3^{2(1-x)}}.$$

3. Для каких a в множестве решений неравенства

$$x+\sqrt{x^2-2ax}>1$$

содержится промежуток $[\frac{1}{4},\ 1]$?

4. Решить уравнение

$$2(\cos^4 x+\sin x\sin 2x+\sin^4 x)=\cos x-\sin^2 2x+4\cos 2x.$$

5. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α, а длина стороны основания равна a. Найти объем пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания под углом φ к плоскости основания.

Вариант 5
(геологический и географический факультеты)

1. Велосипедист отправился с некоторой постоянной скоростью из пункта A в пункт B, отстоящий от A на 75 км. Затем он выехал обратно с той же скоростью, но через 2 часа после выезда из пункта B был вынужден остановиться на 45 минут. После этого велосипедист продолжил путь, увеличив скорость на 5 км/ч. Найти первоначальную скорость велосипедиста, если известно, что на обратный путь он затратил столько же времени, что и на путь от A до B.

2.1 (Для геологического факультета). Решить уравнение

$$\cos 3x-\sin 6x+\sin 2x-\cos 7x=0.$$

2.2 (Для географического факультета). На промежутке $[0;\pi]$ решить уравнение

$$\cos 3x-\sin 6x-\cos 7x-2\sin 2x=0.$$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{2+\log_x 9}\cdot\log_{1/3}x<2.$$

4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагональ $[AC]$ перпендикулярна к боковой стороне $[CD]$. Найти $|BC|$, если известно, что $|AD|=a$, $|AB|^2+|BC|^2=11a^2/16$.

5. Каждый из двугранных углов трехгранного угла равен α. Как удалена от вершины трехгранного угла точка, которая находится внутри угла на расстоянии a от каждого ребра?

Вариант 6
(биолого-почвенный факультет)

1. Расстояние между двумя городами равно 480 км. Пассажирский поезд проходит это расстояние на 4 ч скорее, чем товарный. Если скорость пассажирского поезда увеличить на 8 км/ч, а скорость товарного — на 2 км/ч, то пассажирский поезд проедет все расстояние на 5 ч быстрее товарного.

2.1 (Для отделения биологии). Решить уравнение

$$\cos^3 x-3\cos^2 x+\cos x=2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

2.2 (Для отделения почвоведения). Решить уравнение

$$3\sin^2 x+5\cos^2 x=2(1+\sin 2x).$$

3.1 (Для отделения биологии). Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{3x-5}}(3-x)=-2+\log_{3-x}(14x-3x^2-15).$$

3.2 (Для отделения почвоведения). Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3^2 x+1}=9^{2-\log_3 x^2}.$$

4. Через данную точку, лежащую внутри угла, провести прямую так, чтобы сумма длин отрезков, отсекаемых от сторон угла этой прямой, была наименьшей. Вычислить это наименьшее значение суммы.

5. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны b, а угол между ними равен α. Две боковые грани пирамиды, проходящие через равные стороны основания, перпендикулярны к основанию, а третья грань наклонена к нему под углом α. Определить радиус шара, вписанного в пирамиду.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Вариант 1

1. На рисунке 1 изображены два одинаковых кубика массой M каждый. К середине невесомой нити, прикрепленной к ним в точках A и B, приложена горизонтальная сила $\vec{F}$. При каких значениях F верхний кубик будет неподвижен, если нижний жестко закреплен на поверхности? Коэффициент трения между кубиками μ, а $\widehat{ACB}=2\alpha$.

2. Поршни двух одинаковых неподвижных цилиндров жестко скреплены между собой так, что объемы под поршнями одинаковы (рис. 2). В одном цилиндре находится кислород, а во втором — азот. Массы газов равны. В начальный момент равны и их температуры. Затем температура кислорода повышается в два раза, а его давление меняется по закону $pV^2=\text{const}$. Температура азота остается неизменной. Определите относительные изменения внешнего давления, давления газов и объемов, которые они занимают. Молярная масса кислорода $M_1=32$ кг/кмоль, а азота $M_2=28$ кг/кмоль. Газы считать идеальными, а поршни — невесомыми.

3. Каким условиям должны удовлетворять значения ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннего сопротивления r источника тока, чтобы их можно было определить, имея в распоряжении два одинаковых вольтметра с пределом измерения U и внутренним сопротивлением R?

4. В обычном бытовом зеркале предметы кажутся искаженными, если смотреть в зеркало издали. Если же зеркало находится близко от наблюдателя, то предметы не кажутся искаженными. Объясните, почему?

5. Теоретический вопрос: кипение.

Вариант 2

1. Однородное тело массой M в виде параллелепипеда со сторонами a и b покоится на горизонтальной поверхности (рис. 3). Груз какой массы необходимо подвесить к нити, перекинутой через блок, чтобы началось скольжение тела по поверхности? Коэффициент трения о поверхность μ. Радиус блока, а также массы блока и нити пренебрежимо малы.

2. Поршни двух одинаковых цилиндров жестко связаны так, что объемы под поршнями равны между собой (см. рис. 2). В сосудах находится идеальный газ, причем во втором цилиндре его масса в N раз больше, чем в первом, а начальные температуры равны. Внешнее давление меняют в n раз. Чтобы оставить объемы, занимаемые газами, неизменны-

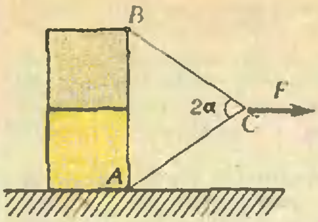


Рис. 1.

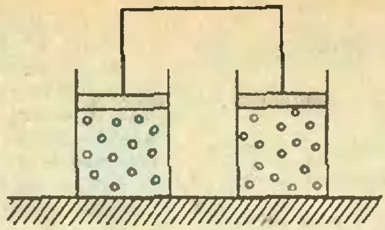


Рис. 2.

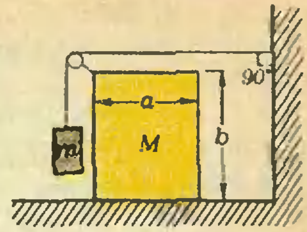


Рис. 3.

ми, пришлось изменить температуру. Как изменилась температура газа во втором цилиндре, если в первом она изменилась в m раз? Поршни можно считать невесомыми.

3. Каким условиям должны удовлетворять ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление r двух одинаковых источников тока, чтобы их можно было определить, используя один вольтметр с пределом измерения U и внутренним сопротивлением R?

4. Узкий параллельный пучок света от лазера, распространяющийся в воде, фокусируется на экран, находящийся на расстоянии F от собирающей линзы. На пути пучка до линзы на расстоянии a от нее оказывается пузырек воздуха в виде сферы радиуса r, который много меньше расстояния a, но много больше радиуса пучка. Куда следует переместить экран, чтобы вновь увидеть на нем точку?

5. Теоретический вопрос: фотоэффект.

Задачи устного экзамена

Математико-механический факультет, факультет прикладной математики — процессов управления, химический и геологический факультеты

1. Тело плавает в воде так, что под водой находится 1/3 часть его объема. Какая часть тела окажется погруженной в воду, если сосуд с водой, в котором плавает тело, будет двигаться вверх с ускорением a?

2. Стеклянный баллон был взвешен трижды: а) откачанный, б) заполненный воздухом при нормальном атмосферном давлении, в) заполненный неизвестным газом при давлении $p=1{,}5$ атм. Показания весов соответственно были равными $m_1=200$ г, $m_2=204$ г, $m_3=210$ г. Температура оставалась постоянной. Определите молярную массу газа.

3. В цилиндре под поршнем находится некоторая масса идеального газа при температуре $t=30$ °C, занимающая при давлении $p=2$ атм объем $V=8$ л. На сколько понизилась температура газа, когда объем его уменьшился при неизменном давлении настолько, что при этом была совершена работа $A=50$ Дж?

4. В плоский конденсатор влетает электрон со скоростью $\vec{v}$ ($v=2\cdot10^7$ м/с), направленной параллельно обкладкам конденсатора. На какое расстояние от своего первоначального направления сместится электрон за время полета внутри конденсатора, если расстояние между пластинами $d=2$ см, длина конденсатора $L=5$ см и разность потенциалов между пластинами $U=200$ В? Отношение заряда электрона к его массе составляет $e/m=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг.

5. От источника с напряжением $U=750$ В необходимо передать мощность $P=5$ кВт на некоторое расстояние. Какое наибольшее сопротивление может иметь линия передачи, чтобы потери мощности в ней не превышали 10 % от передаваемой мощности, то есть мощности, дошедшей до потребителя?

6. Две линзы с фокусным расстоянием $F=30$ см находятся на расстоянии $l=15$ см друг от друга. При каких условиях эта система дает действительное изображение предмета?

7. Красная граница фотоэффекта для материала фотокатода $\lambda_{max}=700$ нм. Отношение скоростей вылетающих электронов при освещении светом с длинами волн λ_1 и λ_2 равно $k=3/4$. Определите λ_2, если $\lambda_1=600$ нм.

Публикацию подготовили
А. Е. Кучма, В. Ф. Осипов, В. Н. Скребов

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(физико-механический и радиофизический факультеты)

1. Упростите выражение:

$$\frac{\left(\sqrt[5]{a^{4/3}}\right)^{3/2}}{\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^3} : \frac{\left(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}}\right)^{-1}}{\left(\sqrt[3]{a\sqrt{b}}\right)^{-6}}.$$

2. Найдите область определения функции

$$f(x)=\sqrt{(x^2-3x-10)\lg^2(x-3)}.$$

3. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной длины $\sqrt{3}$, ребро SA имеет длину 6. Найдите объем пирамиды, если известно, что ее боковые грани имеют равные площади.

4. Докажите, что для углов A, B, C остроугольного равнобедренного треугольника справедливы неравенства

$$1<\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}<\frac{11}{5}.$$

Вариант 2
(факультет технической кибернетики)

1. Решите уравнение

$$2\log_2 x-2\log_2\frac{1}{\sqrt{2}}=3\sqrt{\log_2 x}.$$

2. Решите уравнение

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0.$$

3. Найдите область определения, множество значений и интервалы монотонности функции

$$f(x)=\left(\frac{1-\sqrt{x^3}}{1-\sqrt{x}}-3\sqrt{x}\right)^{0,5}\times$$

$$\times \frac{\sqrt{x^{-1}}-1}{\sqrt[4]{x}+1} \cdot \sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})^{-1}.$$

4. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, длина которой равна $\sqrt{2}$. Найдите объем этой пирамиды, если известно, что $ASC=ASB=$ $=\frac{\pi}{6}$, $SAB=\frac{\pi}{4}$.

Физика

Задачи устного экзамена

Задачи 2, 4 предлагались на вступительных экзаменах на физико-механический факультет, 5 — на радиофизический, 6, 8 — на электромеханический, 1, 7 — на гидротехнический и 3 — на вечерний факультет.

1. Первую треть пути велосипедист едет со скоростью $v_1=2{,}0$ м/с, вторую — со скоростью $v_2=3{,}0$ м/с, а последнюю треть — со скоростью $v_3=5{,}0$ м/с. Найдите среднюю скорость велосипедиста.

2. Вдоль невесомого резинового шнура длиной l_0 соскальзывает металлическая шайба. Сила трения, действующая между шнуром и шайбой, постоянна и по модулю равна f. Жесткость шнура k. Найдите выделившееся при этом количество теплоты. Какая часть работы силы трения, действующей на шнур, превратится в тепло?

3. Плотность пара равна $\rho=2{,}4$ кг/м^3 при температуре $T=295$ К и давлении $p=10^5$ Па. Найдите массу одного киломоля и одной молекулы пара, считая его идеальным газом. Универсальную газовую постоянную считать равной $R=8{,}3$ Дж/(моль · К).

4. Стеклянная пластинка целиком заполняет зазор между обкладками плоского конденсатора, емкость которого при отсутствии пластинки равна C_0. Конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения U. Найдите механическую работу, которую необходимо совершить против электрических сил, чтобы извлечь пластинку из конденсатора.

5. В схеме, изображенной на рисунке 1, известны ЭДС $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_0$ источников, сопротивления R и R_0 резисторов, а также емкость C конденсатора. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы. Найдите заряд на обкладке *1* конденсатора.

6. Две электрические лампочки включили в сеть сначала последовательно, а затем параллельно (рис. 2). Сопротивление первой лампочки равно $R_1=360$ Ом, второй — $R_2=240$ Ом. Какая из лампочек потребляет бо́льшую мощность и во сколько раз в первом и втором случаях?

7. Два математических маятника начинают колебаться одновременно. За одно и то же время первый маятник совершает $N_1=16$, а второй $N_2=8$ колебаний. Найдите отношение длин маятников.

8. Угол падения света на границу двух сред (при переходе его из первой среды во вторую) $\alpha=30^\circ$. Абсолютный показатель преломления второй среды $n_2=2{,}40$. Найдите абсолютный показатель преломления первой среды, если угол между отраженным и преломленным лучами $\delta=90^\circ$.

Публикацию подготовили *Ю. Н. Волгин, Ю. О. Максимов, Б. П. Попов, С. П. Преображенский, Б. А. Чихачев*

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Найдите область определения выражения

$$\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}} : \left(\frac{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}}\right)^{-1}$$

и упростите его.

2. Решите уравнение

$$\log_3(2x+21)-\log_3(4-x)=2^{\log_2 6-1}.$$

3. Докажите тождество

$$\frac{\sin^2\left(\frac{5\pi}{2}+\beta\right)}{\sin(\pi-\beta)\cdot(1+\operatorname{ctg}\beta)}+\frac{\sin^2\beta}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)(1+\operatorname{tg}\beta)}=\cos\beta-\sin\beta.$$

4. Две окружности касаются внутренним образом в точке N. Отрезок MN является диаметром большей окружности. Хорда MK большей окружности касается меньшей окружности в точке C. Докажите, что NC является биссектрисой $\angle MNK$.

5. В правильной треугольной пирамиде величина плоского угла при вершине равна α, а кратчайшее расстояние между боковым ребром и противолежащей стороной основания равно l. Найдите объем пирамиды.

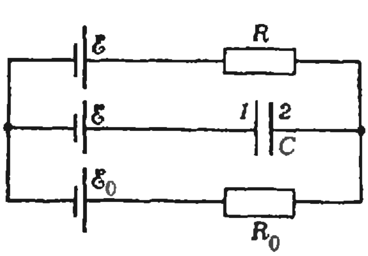


Рис. 1.

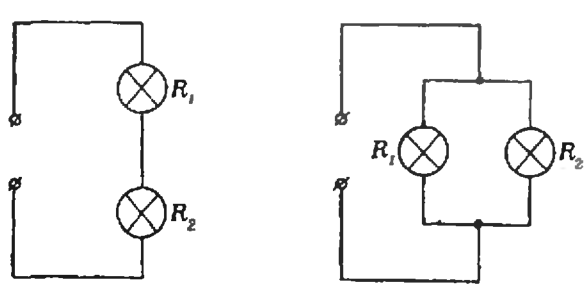


Рис. 2.

Вариант 2
(физический факультет)

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{a-a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-1}-2a^{\frac{1}{3}}+1\right)\cdot\frac{1+a^{\frac{1}{3}}}{1-a^{\frac{2}{3}}}.$$

2. Решите неравенство

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-5x+6}<1.$$

3. Решите уравнение

$$1+\log_2(x^2-1)=\frac{1+\log_2 x\cdot\log_3 2}{\log_3 2}.$$

4. Докажите справедливость равенства

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\,(1+\operatorname{tg}\alpha)}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)}=\sin\alpha-\cos\alpha.$$

5. Определите объем правильной шестиугольной призмы, если известно, что ее самая большая диагональ имеет длину d и составляет с боковым ребром призмы угол α.

Задачи устного экзамена

1. Вычислите без таблиц

$$\frac{\sin 18^\circ\cdot\cos 18^\circ\cdot\cos 36^\circ}{\cos 18^\circ}.$$

2. Найдите область определения функции

$$y=\lg(x^2-x-2)+\frac{x^2-9}{x-3}.$$

3. Вычислите

$$16^{0,5\log_4 25-1}\cdot 5^{\log_{\frac{1}{5}}5}.$$

4. Решите уравнение

а) $81x=3^{2-\log_3 x}$; б) $5^x-5^{3-x}=20$;
в) $\log_3(1+\log_2(1+3\log_2 x))=1$.

5. Решите неравенство

а) $\sqrt{x^2-3x-10}>x-2$; б) $(3x-1)\log_2 x>0$;
в) $(0,4)^{4x^2-2x-2}<(0,4)^{3+2x}$;
г) $\log_{\frac{1}{2}}\log_3 x>1$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=4x^3-6x^2$ на промежутке $[0; 3]$.

7. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, все боковые ребра пирамиды имеют равные длины. Докажите, что вершина пирамиды проектируется в середину гипотенузы ее основания.

8. Что больше: объем шара радиуса 1 дм или объем правильного тетраэдра с ребром 4 дм?

9. Найдите объем воронки, развертка боковой поверхности которой представляет собой полукруг радиуса R.

10. Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, в которую можно вписать окружность, равна произведению длин ее оснований.

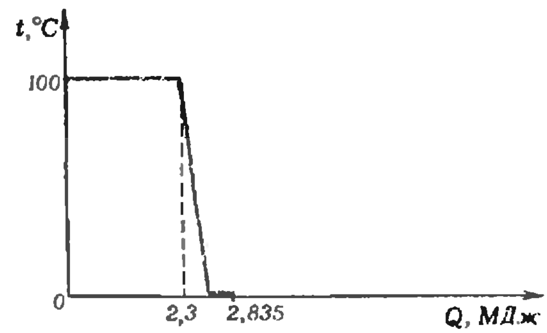
Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Тело, двигаясь равноускоренно из состояния покоя, прошло некоторый путь. Чему равно отношение средней скорости движения тела на второй половине пути к средней скорости на первой половине?

2. Над сосудом с водой укреплены две колбы горлышком вниз так, что горлышки находятся в воде. Колбы частично заполнены водой. При этом уровень воды в них различный. Объясните наблюдаемое явление. Каким образом можно изменить уровень воды только в одной из колб?



3. График, приведенный на рисунке, иллюстрирует процесс превращения водяного пара в лед. Используя график, определите, каково первоначальное количество водяного пара и какое его количество превратилось в лед.

4. Луч света падает под углом $\alpha=30^\circ$ на поверхность воды, налитой в аквариум. На дне аквариума находится плоское зеркало. Во сколько раз изменится расстояние между входящим и выходящим лучами, если воду заменить другой жидкостью, показатель преломления которой будет в два раза больше, чем у воды? Уровень жидкости прежний.

Математический факультет

1. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу начали двигаться два тела. После того как они повстречались, первое тело через $t_1=10$ с прибыло в пункт B, а второе, проехав $s=100$ м за $t_2=40$ с, прибыло в пункт A. Определите скорости движения тел, если движение было равномерным и прямолинейным.

2. Герметически закрытая консервная банка заполнена водой. В крышке, дне и боковой стенке банки сделали по одному малому отверстию. Как, закрыв лишь одно из отверстий, прекратить вытекание воды из банки?

3. Источник тока с ЭДС $\mathscr{E}=30$ В и внутренним сопротивлением $r=6$ Ом замкнули на два резистора, соединенных параллельно. При этом на первом резисторе выделяется количество теплоты в три раза больше, а на втором — в шесть раз больше, чем на внутреннем сопротивлении источника. Какой ток протекает через каждый резистор и через источник?

Индустриально-педагогический факультет

1. К висящей вертикально пружине, массой которой можно пренебречь, подвешивают груз: сначала к ее свободному концу, а затем — к середине. Во сколько раз деформация пружины в первом случае будет больше, чем во втором?

2. Имеются две двойные одинаковые по размерам оконные рамы. Расстояние между стеклами у них одинаковое. Во второй раме посередине сделана сплошная горизонтальная перемычка. Будут ли различаться данные рамы по теплопередаче? Ответ объясните.

3. Имеется гильза из фольги, подвешенная на шелковой нити, и две пластины на изолирующих ручках: одна из эбонита, другая из плексигласа. Как экспериментально определить, заряжена гильза или нет, если ее заряд будет много меньше заряда, образующегося при трении друг о друга имеющихся в распоряжении пластинок?

Публикацию подготовили
Л. А. Бирюков, З. И. Новосельцева

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Вариант 1

1. $x=\frac{4}{7}$; $y=\frac{3}{7}$. Указание. По условию, $\frac{x'}{y'}=\frac{40}{33}$ (*), $x+y=1$. Подставляя в (*) $k=1/2$, получим после упрощения систему $\frac{x(x+2y)}{y(2x+2y)}=\frac{40}{33}$, $x+y=1$.

2. $x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{l\pi}{2}$ $(k,\ l\in Z)$. Указание. Воспользуйтесь тождеством

$$\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1-2\cos 2x}{1+2\cos 2x}.$$

3. $\frac{7}{47}$. Указание. Исследуйте разность между левой и правой частями приближенного равенства с помощью производной.

4. Искомая точка находится на расстоянии $\frac{L\pm\sqrt{12R^2-3L^2}}{2}$ до одной из двух ближайших вершин треугольника $(\sqrt{3}R\leqslant L\leqslant 2R)$.

5. $\arccos\left(\frac{7}{25}\frac{1}{\cos\alpha/2}\right)$ при $0<\alpha<2\arccos 7/25$.

Вариант 2

1. $\frac{7}{64}$. Указание. На промежутках $\frac{1}{4}\leqslant x<1$; $1\leqslant x<4$; $4\leqslant x<9$; $9\leqslant x\leqslant 10$ исследуйте с помощью производной разность между левой и правой частями приближенного равенства.

2. $x=\frac{\pi}{14}(2k+1)$ $(k\in Z)$.

3. $a^3+b^3=1$. Указание. Подставив в выражение $x^3+y^3+z^3-3xyz$ вместо x, y и z их выражения через X, Y, Z, получим

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(a^3+b^3)(X^3+Y^3+Z^3-3XYZ).$$

4. $\frac{2-\sqrt{3}}{4}a$.

5. $|BE|=\frac{2a-p+2\sqrt{(p+a)(p-2a)}}{3}$, если $2a<p<3a$; $|BE|=0$, если $p=2a$; $|BE|=a$, если $p=3a$.

Вариант 3

1. $\frac{4P}{M}(1+\cos\alpha)$. Указание. Пусть m_1 и m_2 — массы частиц $(m_1+m_2=M)$, а v_1 и v_2 — скорости, с которыми они движутся. Из закона сохранения импульса следует, что

$$m_1v_1-P=\frac{MP\cos\alpha}{M-m_1}.$$

С другой стороны,

$$v_2=\frac{P}{M-m_1}.$$

Поэтому

$$v_1+v_2=\frac{MP(1+\cos\alpha)}{(M-m_1)m_1}.$$

Поскольку наибольшее значение знаменателя достигается при $m_1=m_2=\frac{M}{2}$, наименьшая скорость сближения равна $\frac{4P}{M}(1+\cos\alpha)$.

2. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in Z)$.

3. $\{(9,3)\}$. 4. Отношение большего из отрезков к меньшему равно $k=\frac{p+\sqrt{2p-1}}{1-p}$, если $\frac{1}{2}<p<1$. При $p=1$ квадраты совпадают.

5. $\frac{\sin^4\alpha}{3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}-1}}R^3$ при $\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Вариант 4

1. 0,6; 0,8.

2. $x=\frac{3}{2}$.

3. $a<-1$. Указание. Пусть $f_a(x)$ — левая часть неравенства. Должно быть $f_a(1)>1$, $f_a\left(\frac{1}{4}\right)>1$. Отсюда следует, что $a<-1$, но при $a<-1$, все x из промежутка $\left[\frac{1}{4};1\right]$ удовлетворяют исходному неравенству.

4. $x_1=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$; $x_2=\pm\frac{5\pi}{6}+2l\pi$ $(k,\ l\in Z)$.

5. $\frac{1}{6}\frac{\sin^2\alpha\cos\varphi\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\alpha\sin^2(\alpha+\varphi)}$.

Вариант 5

1. 15 км/ч. 2. 1.

2. 2. $\{0,\ \frac{\pi}{2};\ \pi\}$.

3. $\left]\frac{1}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left]1,+\infty\right[$. 4. $\frac{3}{4}a$.

5. $\frac{\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\alpha/2}{\sqrt{3}\operatorname{tg}^2\alpha/2-1}7$.

Вариант 6

1. 40 км/ч; 30 км/ч. 2.1. $x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x_2=2l\pi\,|\,k,\ l\in Z$.

2.2. $\{\operatorname{arctg}3+k\pi,\ \frac{\pi}{4}+k\pi\,|\,k\in Z\}$.

3.1. $\{8/3\}$. 3.2. $\{2,\ 32\}$.

4. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, где a, b — длины сторон параллелограмма, одна из вершин которого совпадает с вершиной угла, вторая — с данной точкой, а остальные лежат на сторонах угла.

5. $b\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На рисунке 1 изображены силы, действующие на верхний кубик: сила тяжести $M\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$

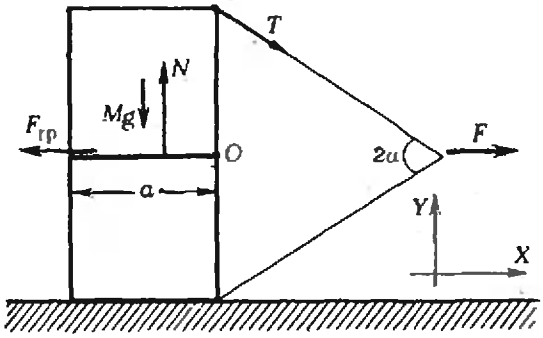


Рис. 1.

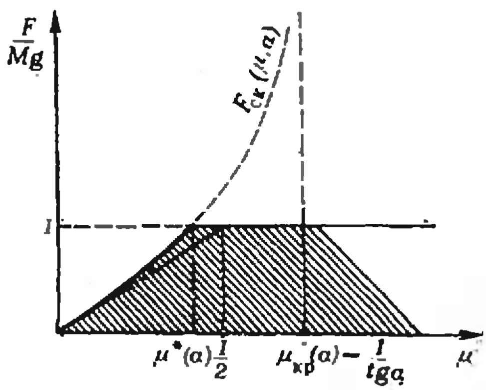


Рис. 2.

и сила натяжения нити $\vec{T}$. Очевидно, что под действием этих сил кубик может не только двигаться поступательно, но и поворачиваться. Поэтому необходимо проанализировать обе возможности.

1) Поступательное движение.

Уравнение поступательного движения имеет вид:

$$\vec{N}+M\vec{g}+\vec{T}+\vec{F}_{тр}=M\vec{a},$$

или (в проекциях на оси координат)

$$N-Mg-T\sin\alpha=Ma_y,$$
$$T\cos\alpha-F_{тр}=Ma_x.$$

Поскольку кубик должен находиться в покое, ускорение $\vec{a}=0$, то есть $a_x=a_y=0$, откуда получаем

$$N=Mg+T\sin\alpha,$$
$$F_{тр}=T\cos\alpha=F/2.$$

Поскольку $0\leqslant F_{тр}<\mu N$, окончательно имеем:

$$F<\frac{2\mu Mg}{1-\mu\,tg\,\alpha}. \qquad (1)$$

Так как $F>0$, это условие является ограничением только при $1-\mu\,tg\,\alpha>0$. Если же $\mu\,tg\,\alpha\geqslant 1$, то наступает «заклинивание», то есть при любом значении F кубик не сможет двигаться поступательно.

2) Вращение.

Кубик может опрокинуться, поворачиваясь относительно оси, проходящей через точку O, в которой при опрокидывании будет приложена сила реакции опоры $\vec{N}$. Максимальное значение силы натяжения нити, при котором кубик еще не опрокинется, можно найти из условия равенства нулю суммы моментов сил

$$Mg\frac{a}{2}-Ta\cos\alpha=0.$$

Учитывая, что $T\cos\alpha=F/2$, получим

$$F=Mg.$$

Очевидно, что опрокидывания не произойдет, если

$$F<Mg. \qquad (2)$$

Рассматривая совместно условия (1) и (2), находим, что при

$$\mu<\mu^*(\alpha)=\frac{1}{2+tg\,\alpha}$$

кубик с ростом F раньше начнет скользить, а при выполнении противоположного неравенства — опрокидываться.

Полученный ответ можно наглядно представить графически. Рисунок 2 соответствует случаю фиксированного α, для которого $0<tg\,\alpha<2$. Допустимые значения параметров F/Mg и μ лежат в заштрихованной области (физический смысл имеет область $\mu\leqslant 1$). При $\alpha\to 0$ значение $\mu^*\to 1/2$ и $\mu_{кр}(\alpha)\to\infty$. При $tg\,\alpha>2$ величина $\mu_{кр}$ лежит в интервале $\mu^*(\alpha)<\mu_{кр}(\alpha)<1/2$.

2. Условие равновесия невесомых поршней достаточно очевидно — удвоенное внешнее давление равно сумме давлений газов в сосудах. Используя это условие, а также уравнение состояния идеального газа

$$pV=\frac{m}{M}RT,$$

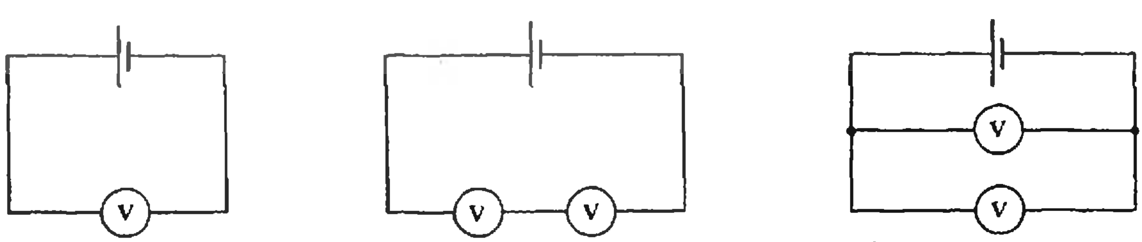
получим для начального состояния

$$p_1=\frac{2M_2p_0}{M_1+M_2}=\frac{14}{15}p_0 \text{ и}$$
$$p_2=\frac{M_1}{M_2}p_1=\frac{16}{15}p_0,$$

где p_0 — внешнее давление, p_1, p_2 — давления кислорода и азота в сосудах, а M_1 и M_2 — их молярные массы. Так как в процессе нагрева $pV^2=$const, то, используя уравнение состояния идеального газа, можно показать, что

$$TV=\text{const},$$

откуда имеем



а) б) в)

Рис. 3.

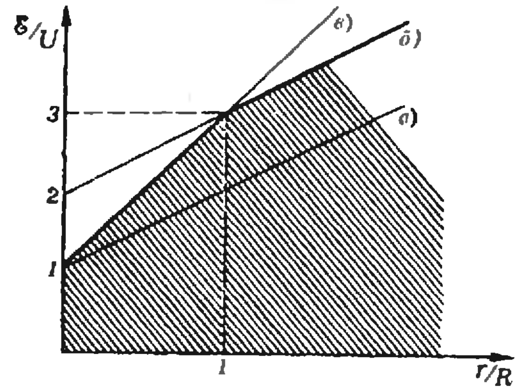


Рис. 4.

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{V'-V}{V}=\frac{T}{T'}-1=-\frac{1}{2}.$$

Здесь V, T — объем, занимаемый кислородом, и его температура до нагрева, а V' и T' — значения тех же величин после нагрева.

Давление кислорода p_1' после нагрева найдем из уравнения газового состояния:

$$p_1'=\frac{p_1VT'}{V'T}=\frac{56}{15}p_0.$$

Аналогично для азота, учитывая, что его температура остается неизменной, получим:

$$p_2'=\frac{V}{V'}p_2=\frac{32}{15}p_0.$$

Относительные изменения давления газов в сосудах равны

$$\frac{\Delta p_1}{p_1}=\frac{p_1'-p_1}{p_1}=3,\quad \frac{\Delta p_2}{p_2}=\frac{p_2'-p_2}{p_2}=1.$$

Условие равновесия поршней после нагрева

$$2p_0=p_1'+p_2'$$

дает возможность вычислить внешнее давление и, в конечном счете, его относительное изменение:

$$\frac{\Delta p_0}{p_0}=\frac{p_0'-p_0}{p_0}=2.$$

3. Возможны три способа включения приборов, показанные на рисунке 3.

Необходимо, чтобы напряжение на каждом из вольтметров не превосходило предельного. Отсюда вытекают следующие ограничения:

а) $\mathscr{E}<U(1+r/R)$,
б) $\mathscr{E}<U(2+r/R)$,
в) $\mathscr{E}<U(1+2r/R)$.

Для определения $\mathscr{E}$ и r следует провести два измерения. Указанные неравенства дают возможность выбрать две схемы, обеспечивающие наиболее широкий диапазон допустимых параметров. Анализ удобно провести графически. На рисунке 4 прямые а), б) и в) — графики правых частей соответствующих неравенств. Заштрихованная область — область разрешенных значений $\mathscr{E}$ и r. Видно, что для определения $\mathscr{E}$ и r всегда лучше производить измерения по схеме б) и в).

Пусть $U_1=\mathscr{E}/(2+r/R)$ — показания вольтметров в схеме б), а $U_2=\mathscr{E}/(1+2r/R)$ — в схеме в), тогда

$$\frac{r}{R}=\frac{2U_1-U_2}{2U_2-U_1},\quad \mathscr{E}=\frac{3U_1U_2}{2U_2-U_1}.$$

4. В зависимости от расстояния между глазом наблюдателя и зеркалом размеры участка зеркала, формирующего изображение, меняются. Путем построения хода лучей можно убедиться, что по мере удаления глаза эти размеры увеличиваются. Если на малом расстоянии они по порядку величины равны диаметру зрачка, то с увеличением расстояния приобретают порядок размеров рассматриваемого объекта или зеркала (меньший из двух). Поскольку бытовое зеркало не является идеально плоским, то на большом участке его поверхности неизбежно наличие неровностей, которые и служат причиной возникающих искажений.

Вариант 2

1. Тело будет скользить по поверхности, если выполняется условие

$$2\left(\frac{b}{a}-1\right)<\frac{M}{m}<\frac{1}{\mu}-1,$$

что возможно в случаях, когда

$$b>a \text{ и } \mu<\frac{1}{2b/a-1}$$

или $\quad b<a \quad (0<\mu<1).$

2. Температура газа во втором цилиндре изменилась в

$$x=\frac{n(N+1)-m}{N}$$

раз; при этом должно выполняться условие $x>0$, то есть

$$n(N+1)>m.$$

3. Возможные варианты включения приведены на рисунке 5. Область разрешенных значений параметров источников показана на рисунке 6. В области $r>R$, величины $\mathscr{E}$ и r определяются по формулам

$$\mathscr{E}=\frac{U_1U_2}{2(U_2-U_1)},\quad \frac{r}{R}=\frac{2U_1-U_2}{2(U_2-U_1)},$$

где U_1 и U_2 — показания вольтметра в схемах, изображенных на рисунках 5, *а* и 5, *б* соответственно. В области $r<R$ имеем

$$\mathscr{E}=\frac{U_1U_3}{2U_1-U_3},\quad \frac{r}{R}=\frac{2(U_3-U_1)}{2U_1-U_3},$$

где U_3 — показание вольтметра в схеме на рисунке 5, *в*.

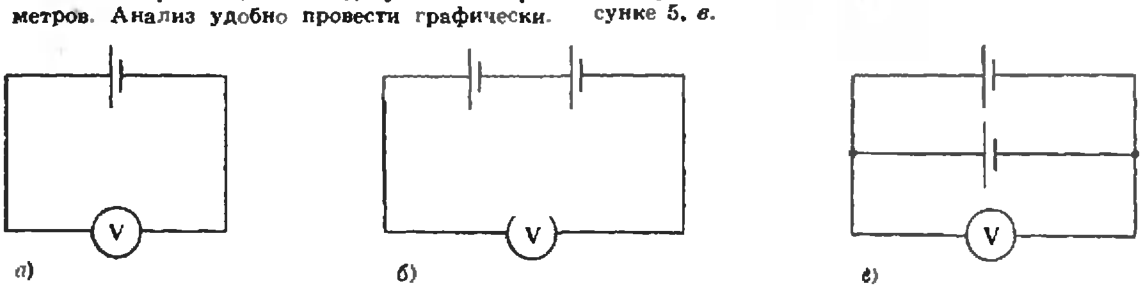


Рис. 5.

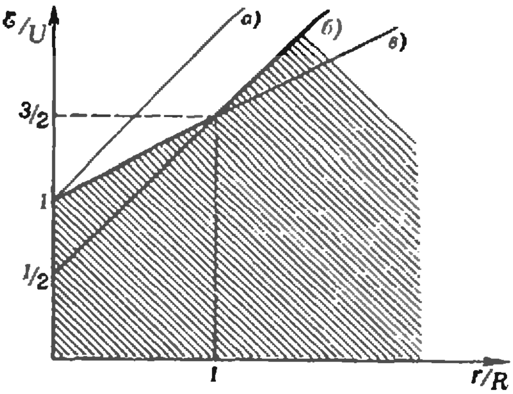


Рис. 6.

4. Так как показатель преломления воздуха меньше показателя преломления воды, действие пузырька эквивалентно действию рассеивающей линзы, которая параллельный пучок лучей преобразует в расходящийся. Если точка пересечения продолжений расходящихся лучей окажется от линзы на расстоянии, большем фокусного, экран следует удалить от линзы. Если же указанное расстояние окажется равным или меньшим фокусного, получить сфокусированное изображение на экране невозможно.

Задачи устного экзамена

1. Глубина погружения тела не изменится.

2. $M_г = M_в \dfrac{m_3 - m_1}{m_2 - m_1} \dfrac{p_0}{p} = 48$ кг/кмоль (здесь $M_в = 29$ кг/кмоль — молярная масса воздуха, $p_0 = 1$ атм — нормальное атмосферное давление).

3. $\Delta T = \dfrac{AT}{pV} = 9{,}5$ К.

4. $x = \dfrac{UL^2}{2dv^2} \dfrac{e}{m} \approx 6 \cdot 10^{-3}$ м.

5. $R = \dfrac{U^2}{P} \dfrac{\alpha}{(1+\alpha)^2} \approx 9$ Ом (здесь $\alpha = 0{,}1$).

6. Предмет должен находиться на расстоянии $d < F/3 = 10$ см от первой линзы.

7. $\lambda_2 = \lambda_1 \dfrac{k^2 \lambda_{max}}{\lambda_{max} - (1-k^2)\lambda_1} \approx 540$ нм.

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Вариант 1

1. $a^{-\frac{1}{15}} \cdot b^{-\frac{1}{3}}$ при $b > 0$, $a > 0$.
2. $[5; +\infty[\cup \{4\}$.
3. 2,25; $0{,}75\sqrt{11}$; $0{,}25\sqrt{105}$. Указание. Вершина S проектируется либо в центр вписанной окружности, либо в центр одной из вневписанных окружностей *).
4. Указание. Задача сводится к исследованию функции $f(x) = 2\sqrt{\cos x} + \sqrt{-\cos 2x}$ при $x \in \left]\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Вариант 2

1. $\{\sqrt[4]{2}; 2\}$; 2. $x_1 = \dfrac{\pi}{4}(2k+1)$; $x_2 = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$ $(k, n \in \mathbb{Z})$.
3. $D(f) =]0; 1[\cup]1; +\infty[$; $E(f) =]0; +\infty[$.
4. $(1+\sqrt{3})/6$; $(\sqrt{1+\sqrt{3}})/3$. Указание. Возможны два случая: 1) $\triangle ABC \cong \triangle ASC$ и 2) $\widehat{ACS} = \widehat{CAS} = \dfrac{5\pi}{12}$, $\widehat{ABS} = \dfrac{7\pi}{12}$, поскольку, по теореме синусов $\dfrac{\sin \widehat{ACS}}{|AS|} = \dfrac{\sin \widehat{ASC}}{|AC|} = \dfrac{\sin \widehat{ABS}}{|AS|}$, то есть $\sin \widehat{ACS} = \sin \widehat{ABS}$. Поэтому либо $\widehat{ACS} = \widehat{ABS} = \dfrac{7\pi}{12}$ и тогда $\triangle ABS \cong \triangle ASC$, либо $\widehat{ACS} = \pi - \widehat{ABS} = \dfrac{5\pi}{12}$ и тогда имеет место случай 2.

Физика

1. $v_{ср} = \dfrac{3}{1/v_1 + 1/v_2 + 1/v_3} \approx 2{,}9$ м/с.
2. $Q = f(l_0 - f/(2k))$; работа силы трения, действующей на шнур, превращается в тепло наполовину.
3. $M = \dfrac{\varrho RT}{p} 10^3 \approx 58{,}8$ кг/кмоль;

$m_0 = \dfrac{M}{10^3 N_A} \approx 9{,}7 \cdot 10^{-26}$ кг

(здесь $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ 1/моль — постоянная Авогадро).

4. $A_{мех} = (\varepsilon - 1)C_0U^2/2$ (здесь ε — диэлектрическая проницаемость стекла).
5. $q = \dfrac{C(\mathscr{E}_0 - \mathscr{E})R}{R_0 + R}$.
6. В первом случае первая лампочка потребляет в 1,5 раза бо́льшую мощность, чем вторая, а во втором случае вторая лампочка потребляет в 1,5 раза бо́льшую мощность, чем первая.
7. $l_1/l_2 = (N_2/N_1)^2 = 1/4$.
8. $n_1 = n_2/\operatorname{tg}\alpha \approx 4{,}15$.

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Выражение определено при $a > 0$, $b > 0$, $a \ne b$ и равно $\dfrac{a+b}{a-b}$ при $a > b$ и $\dfrac{a+b}{b-a}$ при $a < b$.
2. $\{3\}$.
4. Указание. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей (рис. 7). Так как $\widehat{MCO_2} = \widehat{MKN} = 90°$, прямые CO_2 и KN параллельны. Поэтому $\widehat{1} = \widehat{2}$, но $\widehat{1} = \widehat{3}$, поскольку треугольник O_2CN — равнобедренный.

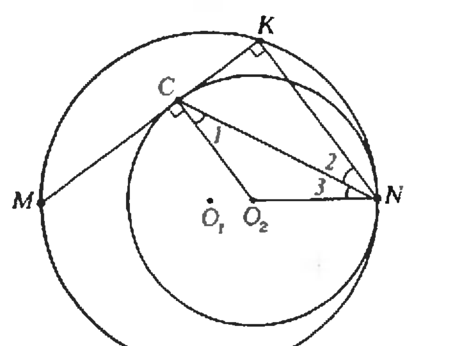


Рис. 7.

*) Вневписанной называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон.

5. $v_n = \dfrac{l^3}{3\sin\frac{3}{2}\alpha}$.

Указание. Пусть в пирамиде $SABC$ точка D — середина BC, DK — общий перпендикуляр AS и BC, O — основание высоты, $|BC|=x$. Найдите x из соотношения $|KD|\cdot|AS|=|SO|\cdot|AD|$, предварительно выразив AD, SO, AS через l, x и α.

Вариант 2

1. 1, 2. $]-\infty;\ -\frac{1}{2}[\cup]2;\ \infty[$. 3. $\{2\}$.

5. $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}d^3\sin\alpha\sin 2\alpha$.

Задачи устного экзамена

1. $\frac{1}{4}$.

2. $]-\infty;\ -1[\cup]2;\ 3[\cup]3;\ \infty[$.

3. $\frac{5}{16}$.

4. а) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$; б) $\{2\}$; в) $\{2\}$.

5. а) $]14;\ \infty[$; б) $]0;\ \frac{1}{3}[\cup]1;\ \infty$; в) $]-\infty;\ \frac{1-\sqrt{6}}{2}[\cup]\frac{1+\sqrt{6}}{2};\ \infty[$; г) $]0;\ \sqrt{3}[$.

6. $y_{min}=y(1)=-2$;
$y_{max}=y(3)=54$.

8. Объем правильного тетраэдра с ребром 4 больше объема шара радиуса 1.

9. $\frac{\pi R^3}{24}\sqrt{3}$.

Физика

Физический факультет

1. $v_{ср\,2}/v_{ср\,1}=\sqrt{2}+1\approx 2{,}4$.

2. Различие в уровнях воды объясняется различием давления воздуха в колбах (давление больше там, где уровень ниже). Для изменения уровня воды в одной из колб необходимо изменить давление воздуха в ней, нагрев или охладив колбу, например с помощью тряпочки, смоченной горячей или холодной водой.

3. $m_1=1$ кг; $m_2\approx 0{,}35$ кг.

4. Расстояние между лучами уменьшится примерно в 2,2 раза.

Математический факультет

1. $v_1=s/t_2=5$ м/с; $v_2=s/\sqrt{t_1t_2}=2{,}5$ м/с.

2. Закрыв одно из отверстий (любое), нужно поворачивать банку до тех пор, пока два других отверстия не окажутся на одном горизонтальном уровне.

3. $I_r=\frac{\mathcal{E}}{10r}=1/2$А; $I_{R1}=1/6$А; $I_{R2}=1/3$А.

Индустриально-педагогический факультет

1. Деформация пружины в первом случае в 2 раза больше, чем во втором.

2. Теплопередача осуществляется за счет излучения, теплопроводности и конвекции. Два первых процесса для обеих рам происходят одинаково. Конвекция же для второй рамы будет затруднена, поэтому вторая рама будет лучше сохранять тепло в помещении.

3. Нужно потереть пластины друг о друга, расположить их параллельно (с целью создания однородного электростатического поля) и поместить между ними гильзу. Если гильза отклонится от положения равновесия, значит, она заряжена.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 1)

Задание 1 (А. Казанцев, 1949—1950 гг.). **1. Кс2 Сg7 2. с7 Лс6 3. а7 Л:с2 4. Cd2 а2 5. а8Ф а1Ф 6. Ф:а1 С:а1 7. с8Ф+! Л:с8 8. Сс3! Лb8 9. Cb2! Лd8 10. Cd4! Ле8 11. Се5!** Несмотря на лишнюю ладью и полную беззащитность взбесившегося слона, черные вынуждены повторять ходы, смиряясь с ничьей!

Задание 2 (А. Казанцев, 1953 г.). **1. Лb7! Фе5 2. Cd1+ Кра5 3. b4+ Кра6 4. Се2+! Ф:е2 5. Крb8! Фе5+ 6. Крс8 Фе8+ 7. Крс7 C:d5 8. а8Ф+!! Ф:а8 9. Лb6+ Кра7 10. b5 Cb7 11. Ла6+! С:а6 12. b6×!**

А. Карпов об этом этюде сказал так: «Этюд заслуживает самой высокой похвалы. В нем удивительно изящный финал, которому предшествует увлекательная вступительная игра».

Квант для младших школьников
(см. «Квант» № 2)

1. Если 16 блокнотов стоят x рублей и на 1 рубль можно купить x блокнотов, то один блокнот стоит $x:16$ и $1:x$, то есть $x/16=1/x$, откуда $x^2=16$, то есть $x=4$, а один блокнот стоит $1:4=0{,}25$ рубля.

2. Обозначим путь, пройденный на лыжах сегодня, через x, а вчера — через y. Тогда позавчера был пройден путь $y+3$ км. Из второго соотношения следует, что $y+40=y+3+x$. Отсюда $x=37$ км.

3. В многоугольнике, у которого каждая сторона либо вертикальна, либо горизонтальна, число сторон четно, так как его стороны последовательно чередуются: вертикальная — горизонтальная — вертикальная — ... — горизонтальная.

4. В этом высказывании нарушен закон сохранения энергии.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 3)

1. $1+2=3$
$-1+2+3=4$
$12-3-4=5$
$1+2-3-4+5+6=7$
$1+2+3-4+5-6+7=8$
$12+3+4-5-6-7+8=9$.

2. На первом месте 6«Г», на втором 6«А», на третьем 6«Б» и на четвертом 6«В».

3. 6, 2 и 1.

4. $1+2+3+\ldots+12+14=92$.

5. Воздух, находящийся в горячем стакане, нагревается от его стенок, расширяется и начинает выходить из-под стакана. Образуется «воздушная подушка», из-за чего резко уменьшается трение, и стакан начинает скользить по столу в сторону наклона стола, даже если этот наклон почти не заметен.

Наша обложка
(см. «Квант» № 3)

Задача с четвертой страницы обложки третьего номера является хорошей иллюстрацией того, что чересчур подробный чертеж может даже несколько затруднить поиск решения. Из чертежа на обложке третьего номера надо увидеть, что искомый угол равен по величине плоскому углу ADO, где O — центр шара (прямая DA перпендикулярна BD (линии пересечения плоскостей) по условию, а DO — по теореме о трех перпендикулярах (проекция прямой DO на плоскость ABC есть прямая DA)); после этого можно избавиться от лишних деталей чертежа (рис. 8) и перейти к решению.

Первое решение. Пусть φ — величина искомого угла; тогда $\operatorname{tg}\varphi = OA : DA = 2R : a$, где R — радиус шара, a — длина ребра основания пирамиды. Выразим R через a, составив и приравняв два выражения для расстояния OS от центра шара до вершины пирамиды. Из прямоугольного треугольника OPS (P — точка касания прямой BS с шаром) имеем

$$OS^2 = OP^2 + PS^2 = R^2 + (a-b)^2 \qquad (1)$$

($PS = PB = BS = BA - BS = a - b$, где b — длина бокового ребра пирамиды; отрезки BP и BA равны как касательные, проведенные к шару из одной точки).

Из треугольника OAS, в котором угол OAS равен 45° (AO — перпендикуляр к плоскости ABC, а прямая AS наклонена к ней под углом 45°), по теореме косинусов получаем второе равенство:

$$OS^2 = OA^2 + AS^2 - 2OA \cdot AS \cdot \cos 45^\circ =$$

$$= R^2 + b^2 - Rb\sqrt{2}. \qquad (2)$$

Теперь выразим b через a из прямоугольных треугольников AHS и AHD (SH — высота пирамиды):

$$b = AS = AH\sqrt{2} = AD \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{\frac{2}{3}},$$

подставим это выражение в (1) и (2) и приравняем правые части этих соотношений:

$$R^2 + \left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 a^2 = R^2 + \frac{2}{3}a^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}Ra,$$

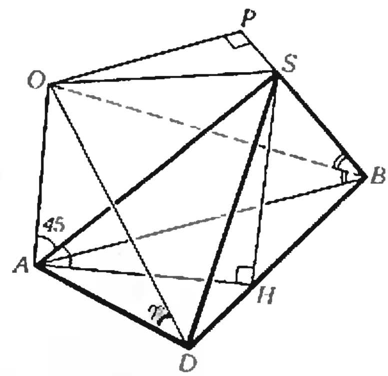


Рис. 8.

откуда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2R}{a} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2}{3} - \left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\right) =$$

$$= 2\sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

Ответ: $\varphi = \operatorname{arctg}(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$.

Второе решение. Пусть $\angle ABO = \angle SBO = \alpha$. Тогда

$$\cos\alpha = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BO}}{BA \cdot BO} = \frac{\vec{BS} \cdot \vec{BO}}{BS \cdot BO}. \qquad (3)$$

Имеем:

$$\vec{BA} \cdot \vec{BO} = \vec{BA} \cdot (\vec{BA} + \vec{AO}) = \vec{BA}^2 \quad (\angle BAO = 90^\circ).$$

Аналогично,

$$\vec{BS} \cdot \vec{BO} = (\vec{BH} + \vec{HS}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AO}) =$$

$$= \vec{BH} \cdot \vec{BA} + \vec{HS} \cdot \vec{AO} =$$

$$= BH \cdot BA \cdot \cos 30^\circ + HS \cdot AO.$$

Подставляя эти выражения в (3) и пользуясь тем, что $\angle HBS = 45^\circ$, получим ответ.

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Б. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
А. В. Бондин, Е. В. Винодарова, В. В. Губин, М. Б. Дубах, Н. И. Лахтунов, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, Е. С. Шабельник

Фото представили:
В. П. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор М. Л. Медведская

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

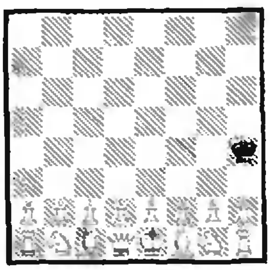
Сдано в набор 16.02.85. Подписано к печати 27.03.85
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8
Бумага 70×10 1/16
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,53. Т-07435
Тираж 178 412 экз. Цена 40 коп. Заказ 397

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300, г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ФИГУРЫ НА СВОИХ МЕСТАХ

Любителям головоломок хорошо известна задача С. Лойда, в которой все фигуры белых занимают исходные места.



Мат в 3 хода.

1. d4! Kph5 2. Фd3 и 3. Фh3×, 1... Kpg4 2. e4+ Kph4 3. g3×. Заметим, что h4 — единственное поле, на котором одинокий черный король умудряется получить мат так быстро.

Рассмотрим еще ряд примеров на ту же тему — в них все фигуры белых, присутствующие на доске, расположены на своих первоначальных полях. Этот жанр шахматной композиции довольно привлекателен; может быть, дело в том, что работа композитора в этом случае как бы вдвое упрощается!?

Белые: Kpe1, Фd1, Cc1, Cf1; черные: Kpe4. Мат в 3 хода.

Эту трехходовку составил гроссмейстер П. Бенко, один из немногих шахматистов-практиков, всерьез занимающихся композицией. Решает «дебют слона» — **1. Cc4!** Kpe5 2. Фd5+ Kpf6 3. Фg5×, 1... Kpf5 2. Фf3+ Kpe5 3. Фf4× (2... Kpg6 3. Фf7×).

В следующих двух позициях белые фигуры расположены на тех же местах, а черного короля сопровождает слон или пешка.

А. Шуряков. Белые: Kpe1, Фd1, Cc1, Cf1; черные: Kpg3, Ch5. Мат в два хода.

Не проходит 1. Фd4 с попыткой 2. Фf4× (1... Cg4 2. Фf2×). Это так называемая иллюзорная игра, черные отвечают 1... Kph2! и мата нет. Решает **1. Фd2!** с той же угрозой 2. Фf4×, и теперь **1... Kph4 (Cg4) 2. Фg5 (f2)×.**

В. Лашманов. Белые: Kpe1, Фd1, Cc1, Cf1; черные: Kpa5, п. b5. Мат в 2 хода.

К цели ведет **1. Фd6!** Черные в цугцванге, мат не грозит, но 1... Kpa4 2. Фa3×, 1... b4 2. Фa6×.

В рассмотренной позиции черную пешку можно снять с доски (1. Фd6! Kpa4 2. Фa3×), но тогда пропадает тема цугцванга и исчезает второй симпатичный мат с поля a6.

А. Шуряков придумал сразу два квартета-близнеца.

а) Белые: Kpe1 Фd1, Cf1; черные: Kpe3.
б) Белые: Kpe1, Фd1, Cc1; черные: Kpc3.
Мат в 4 хода.

При помощи белопольного слона мат ставится на краю доски: **1. Фa4 Kpf3 2. Фd4 Kpg3 3. Фe4 Kph2 4. Фg2×**, а при чернопольном — в центре: **1. Фa4 Kpd3 2. Cb2 Kpe3 3. Фg4 Kpd3 4. Фe2×.**

Рекорд принадлежит следующей задаче-малютке.

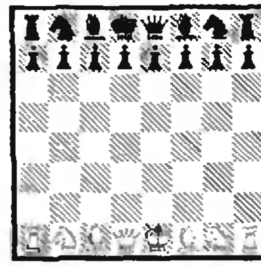
М. Гориславский. Белые: Kpe1, Фd1; черные: Kph2. Мат в 2 хода.

В этой двухходовке на своих местах стоят белый король и ферзь. **1. Kpf2** и **2. Фh5×.** Очевидно, одну белую фигуру оставлять на своем месте бесполезно...

В. Антипов. Белые: Kpe1, Фd1, Kg1; черные: Kph1, Cf1, п. h2. Мат в 3 хода.

Король и ферзь опять на своих местах, а роль слона взял на себя конь. Черного короля сопровождает слон и пешка. **1. Kh3!** Черные в цугцванге. 1... Ce2 2. Фd5+ Cf3 3. Ф:f3×, 1... C:h3 (или любой другой ход слона) 2. Kpf2+ Cf1 3. Ф:f1×, 1... Kpg2 2. Фg4+ Kph1 3. Kf2×.

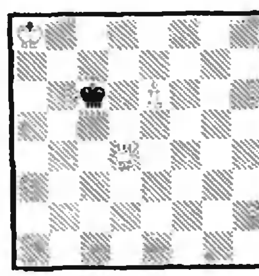
И в заключение задача-головоломка, придуманная ирландским писателем лордом Э. Дансэни.



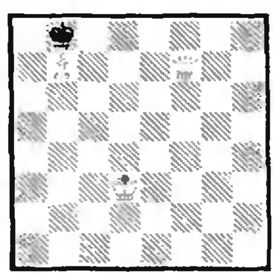
Мат в 4 хода.

Ключом к разгадке служит то обстоятельство, что король и ферзь черных стоят не на своих местах. Значит, они уже перемещались, а тогда двигались и пешки. Но пешки назад не ходят, из чего мы заключаем, что произошла путаница и доску нужно развернуть на 180°. Теперь решение не вызывает труда: **1. Kd7! Kf3!** (при трех других возможных ходах коней следует 2. Ke5 и мат на d3 или f3) **2. Kc5! Ke5! 3. Ф:e5** и **4. Kd3×.** Как выяснилось, белые фигуры в данном случае занимали не свои места, а чужие.

Конкурсные задания



7. Мат в 3 хода.



8. Мат в 3 хода.

Срок отправки решений — 25 июня 1985 г. (с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 7, 8»).

Цена 40 коп.

Индекс 70465

ЮБИЛЕЙ КОСМИЧЕСКОЙ СВЯЗИ

20 лет назад, 23 апреля 1965 года, в нашей стране был выведен на орбиту первый искусственный спутник связи «Молния-1», и вскоре с его помощью начались передачи программ Центрального телевидения, а также телефонных разговоров, телеграфных и фототелеграфных сообщений из Москвы во Владивосток и обратно. Такие спутники выводятся на сильно вытянутые эллиптические орбиты с максимальным удалением от поверхности Земли около 40 000 км и периодом обращения около 12 часов. В течение 6—8 часов они видны со всей территории нашей страны, и их ретранслирующие устройства передают разнообразную информацию между весьма удаленными друг от друга пунктами. Спутники связи «Молния» позволили создать систему космической телевизионной связи «Орбита».

Создание космической связи явилось крупным событием в истории отечественной науки и техники. Оно было отмечено выпуском специальных знаков почтовой оплаты как в нашей стране, так и за рубежом. На приведенной здесь подборке воспроизведены марки и почтовый блок с изображением советских спутников связи серии «Молния».

В. Рудов